2006 年 7 月 12 日

問題 1.　三角形 ABC の内心を I とする．点 P がこの三角形の内部にあって，等式

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

をみたすとき， $AP \geqq AI$ を示せ．

　また，この不等式において等号が成立するための必要十分条件は $P = I$ であることを示せ．

問題 2.　正 2006 角形 P がある．P の対角線で次の条件をみたすものを**奇線**とよぶことにする：対角線の両端点で P の周を 2 つの部分に分けたとき，各部分は奇数個の辺を含む．

　また，P の各辺も**奇線**とよぶ．

　P を，端点以外では共通点をもたない 2003 本の対角線で三角形に分割するとき，2 辺が奇線であるような二等辺三角形の個数のとりうる最大値を求めよ．

問題 3.　任意の実数 a, b, c に対して不等式

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leqq M\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

が成り立つような最小の実数 M を求めよ．

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点

2006年7月13日

問題 4. 以下の等式をみたす整数の組 (x, y) をすべて求めよ.

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

問題 5. $P(x)$ を次数 $n\,(n > 1)$ の整数係数多項式とし，k を正整数とする．このとき，$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$ を考える．ただし，P は k 回現れている．

$Q(t) = t$ をみたす整数 t は高々 n 個であることを示せ.

問題 6. 凸多角形 P の各辺 b に対して，b を1つの辺とする三角形であって P に含まれるものの面積の最大値を割りあてる．この凸多角形 P の各辺に割りあてられた面積の和は，P の面積の2倍以上であることを示せ.

試験時間：4時間30分

各問7点