Language: **Japanese** Day: **1**

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 年 7 月 16 日 (水)

問題 1. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし，中心が BC の中点であって H を通る円と直線 BC との交点を A_1, A_2 とする． 同様に，中心が CA の中点であって H を通る円と直線 CA との交点を B_1, B_2 とし，中心が AB の中点であって H を通る円と直線 AB との交点を C_1, C_2 とする．このとき，$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ は同一円周上にあることを示せ．

問題 2. (a) $xyz = 1$ をみたす 1 でない実数 x, y, z に対し，

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqq 1$$

が成り立つことを示せ．
(b) $xyz = 1$ をみたす 1 でない有理数 x, y, z の組であって，上の不等式の等号を成立させるものが無数に存在することを示せ．

問題 3. 次の条件をみたす正の整数 n が無数に存在することを示せ．

条件：$n^2 + 1$ は $2n + \sqrt{2n}$ より大きい素因数を持つ．

Language: Japanese

試験時間: 4 時間 30 分
各問 7 点

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

2008 年 7 月 17 日 (木)

問題 4. 関数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (正の実数に対して定義され, 正の実数値をとる関数 f) であって, 次の条件をみたすものをすべて求めよ.

条件：$wx=yz$ をみたす任意の正の実数 w, x, y, z に対して,

$$\frac{\big(f(w)\big)^2+\big(f(x)\big)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

が成立する.

問題 5. 正の整数 n,k は $k\geqq n$ をみたし, $k-n$ は偶数である. 1, 2, ..., $2n$ の番号がついた $2n$ 個の電球があり, 各々は on または off の状態をとる. 最初はすべての電球が off になっている. 1 つの電球の状態を入れ替える（on ならば off に, off ならば on にする）ことを**操作**という.

k 回の操作の後, 電球 $1,\dots,n$ が on, 電球 $n+1,\dots,2n$ が off となるような k 回の操作のやり方は N 通りあるとする.

k 回の操作の後, 電球 $1,\dots,n$ が on, 電球 $n+1,\dots,2n$ が off となるような k 回の操作のやり方であって, 電球 $n+1,\dots,2n$ が一度も on になることのないものは M 通りあるとする.

このとき, $\dfrac{N}{M}$ を求めよ.

問題 6. 凸四角形 $ABCD$ について, $BA\neq BC$ が成り立つ. 三角形 ABC, ADC の内接円をそれぞれ ω_1, ω_2 とする. 直線 AD, CD に接する円であって, 直線 BA と A に関して B の反対側 (A は含まない) で接し, 直線 BC と C に関して B の反対側 (C は含まない) で接するものが存在したとし, この円を ω とする. このとき, ω_1, ω_2 の 2 本の共通外接線は ω 上で交わることを示せ.

試験時間: 4 時間 30 分
各問 7 点