2009 年 7 月 15 日 (水)

問題 1. n を正の整数とし, $a_1, \ldots, a_k$ ($k \geqq 2$) を集合 $\{1, \ldots, n\}$ の相異なる元とする. $i = 1, \ldots, k-1$ に対し, $a_i(a_{i+1} - 1)$ は n で割りきれるとする. このとき, $a_k(a_1 - 1)$ は n で割りきれないことを示せ.

問題 2. 三角形 ABC の外心を O とする. P, Q はそれぞれ線分 CA, AB 上の端点でない点である. 線分 BP, CQ, PQ の中点をそれぞれ K, L, M とし, K, L, M を通る円を Γ とする. Γ と直線 PQ は接しているとする. このとき, $OP = OQ$ を示せ.

問題 3. $s_1, s_2, s_3, \ldots$ は正の整数からなる狭義単調増加数列であり,

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \qquad \text{および} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

はどちらも等差数列である. このとき, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ も等差数列であることを示せ.

2009年7月16日(木)

問題 4. 三角形 ABC は $AB = AC$ をみたす．角 CAB, 角 ABC の二等分線が, 辺 BC, 辺 CA とそれぞれ D, E で交わっている．三角形 ADC の内心を K とする．$\angle BEK = 45^\circ$ であるとする．このとき, $\angle CAB$ としてありうる値をすべて求めよ．

問題 5. 正の整数に対して定義され, 正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 a, b に対して

$$a,\ f(b),\ f\bigl(b + f(a) - 1\bigr)$$

が非退化な三角形の3辺の長さとなるようなものをすべて決定せよ．
ただし, 三角形が非退化であるとは, 3つの頂点が同一直線上に並んでいないことを指す．

問題 6. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を相異なる正の整数とし, M を $n-1$ 個の正の整数からなる集合であって $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を含まないようなものとする．数直線上の点0にいるバッタが, 正の方向に向かって長さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の n 回のジャンプをある順番で行う．このとき, M に含まれる点にバッタが一度も着地しないようなジャンプの順番が存在することを示せ．

試験時間: *4* 時間 *30* 分
各問 7点