2010 年 7 月 7 日 (水)

問題 1. 実数に対して定義され実数を値にとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して,

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.
ただし, $[z]$ で z を超えない最大の整数を表すものとする.

問題 2. 三角形 ABC の内心を I とし, 外接円を Γ とする. 直線 AI が円 Γ と再び交わる点を D とする. 点 E は弧 BDC 上, 点 F は辺 BC 上にあり, 次をみたす：

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC.$$

線分 IF の中点を G とする. このとき, 直線 DG と直線 EI は円 Γ 上で交わることを示せ.

問題 3. 正の整数に対して定義され正の整数を値にとる関数 g であって, 任意の正の整数 m, n に対して,

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

が平方数となるようなものをすべて求めよ.

試験時間: 4 時間 30 分
各問 7 点

2010 年 7 月 8 日 (木)

問題 4. 三角形 ABC の内部に点 P がある．直線 AP, BP, CP が三角形 ABC の外接円 Γ と再び交わる点を，それぞれ K, L, M とする．円 Γ の点 C における接線が，点 S で直線 AB と交わるとする．このとき，$SC = SP$ が成り立つならば，$MK = ML$ が成り立つことを示せ．

問題 5. 6 つの箱 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ があり，コインが 1 枚ずつ入っている．次の 2 種類の操作を考える：

操作 1：空でない箱 B_j $(1 \leqq j \leqq 5)$ を選び，箱 B_j から 1 枚のコインを取り除き，箱 B_{j+1} に 2 枚のコインを入れる．

操作 2：空でない箱 B_k $(1 \leqq k \leqq 4)$ を選び，箱 B_k から 1 枚のコインを取り除き，箱 B_{k+1}, B_{k+2} の中身を入れ替える (ただし，これらの箱は空であってもよい)．

これらの操作を有限回行い，箱 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 が空でかつ B_6 にちょうど $2010^{2010^{2010}}$ 個のコインが入っている状態にできるか．

ただし，a^{b^c} は $a^{(b^c)}$ を表すものとする．

問題 6. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を正の実数からなる数列とし，s を正の整数とする．$n > s$ なる任意の整数 n に対し，

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leqq k \leqq n-1\}$$

が成り立つとする．このとき，次の条件をみたす $\ell \leqq s$ なる正の整数 ℓ と正の整数 N が存在することを示せ．

条件：$n \geqq N$ をみたす任意の n について $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ が成り立つ．