Monday, July 18, 2011

問題 1. 相異なる 4 つの正の整数の組 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ に対し, $s_A=a_1+a_2+a_3+a_4$ とおく. $1\leqq i<j\leqq 4$ なる組 (i,j) であって, a_i+a_j が s_A を割りきるようなものの個数を n_A とおく. このとき, n_A が最大となるような A をすべて求めよ.

問題 2. 平面上の有限個の点からなる集合を $\mathcal{S}$ とし, $\mathcal{S}$ は 2 個以上の点を含み, どのように $\mathcal{S}$ の 3 点をとっても同一直線上にはないとする. 直線 l が, $\mathcal{S}$ の点 P を通り, P 以外の $\mathcal{S}$ の点は通らないとしたとき, l から定まる**風車**とは次のような一連の操作を指す：

> まず l を P を中心として時計回りに回転させ, P 以外の $\mathcal{S}$ の点を初めて通るところで止める. その $\mathcal{S}$ の点を Q とし, その直線を Q を中心として時計回りに回転させ, Q 以外の $\mathcal{S}$ の点を通るところで止める (ここで, まったく回転しないことはないとする). 以下これを無限回繰り返す.

このとき, $\mathcal{S}$ の点 P と P を通る直線 l をうまく選ぶと, l から定まる風車における回転の中心として, $\mathcal{S}$ のどの点も無限回現れるようにできることを示せ.

問題 3. 関数 f は, 実数全体に対して定義され, 実数値をとるとする. 任意の実数 x,y に対して,

$$f(x+y)\leqq yf(x)+f\big(f(x)\big)$$

が成立するとき, 任意の 0 以下の実数 x に対し $f(x)=0$ であることを示せ.

試験時間：*4* 時間 *30* 分
各問 *7* 点

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

Language: **Japanese**

Day: **2**

Tuesday, July 19, 2011

問題 4. n を正の整数とする．てんびんと，重さが $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$ の n 個のおもりがある．これらのおもりを，1 つずつ，右の皿が左の皿よりも重くなることが一度もないようにてんびんにのせていき，皿にのっていないおもりがなくなるまでこれを続ける．

このようにおもりをのせる方法は何通りあるか．

問題 5. 整数全体に対して定義され，正の整数値をとる関数 f があり，任意の整数 m, n に対し，$f(m) - f(n)$ が $f(m-n)$ で割りきれるとする．整数 m, n が $f(m) \leqq f(n)$ をみたすならば，$f(n)$ が $f(m)$ で割りきれることを示せ．

問題 6. 鋭角三角形 ABC があり，その外接円 Γ に直線 l が接している．直線 BC, CA, AB に関して l と対称な直線をそれぞれ l_a, l_b, l_c とする．このとき，l_a, l_b, l_c によって囲まれる三角形の外接円が Γ に接することを示せ．

試験時間：*4* 時間 *30* 分
各問 *7* 点