



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Japanese

Day: 1

2012年7月10日(火)

問題 1. 三角形 ABC において、角 A 内の傍接円の中心を J とする。この傍接円は辺 BC と点 M で接し、直線 AB, AC とそれぞれ点 K, L で接する。直線 LM と直線 BJ は点 F で交わり、直線 KM と直線 CJ は点 G で交わる。直線 AF と直線 BC の交点を S 、直線 AG と直線 BC の交点を T とする。

このとき、 M が ST の中点であることを証明せよ。

ただし、三角形 ABC の角 A 内の傍接円とは、辺 BC および、辺 AB の B 側への延長、辺 AC の C 側への延長に接する円のことである。

問題 2. $n \geq 3$ を整数とし、 a_2, a_3, \dots, a_n を $a_2a_3 \cdots a_n = 1$ をみたす正の実数とする。このとき、

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$$

が成り立つことを示せ。

問題 3. うそつき数当てゲームは、2人のプレイヤー A と B によって行われるゲームである。このゲームのルールは、あらかじめ双方のプレイヤーに知らされている正の整数 k, n に依存する。

ゲームの開始時に、 A は $1 \leq x \leq N$ をみたす整数 x, N を選ぶ。 A は N を B に正直に伝え、 x は秘密にする。その後、 B は x についての情報を得るべく、 A に次のようにして質問をしていく： B は正の整数からなる集合 S を指定し（以前の質問で指定した S と同じでもよい）、 x が S に属するかを A に尋ねる。 B はこのような質問を何回でもすることができる。 A は B の各質問に対し、直ちに「はい」か「いいえ」で答えなければならないが、何回でも嘘をつくことができる。ただし、どの連続する $k+1$ 個の回答についても、そのうち少なくとも 1 個の回答は真実でなければならない。

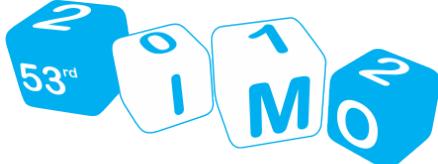
B が望むだけ質問を行った後、 B は高々 n 個の正の整数からなる集合 X を指定しなければならない。 x が X に属するならば B の勝ちであり、そうでなければ B の負けである。このとき、以下のことを証明せよ：

1. $n \geq 2^k$ ならば、 B は確実に勝つことが可能である。
2. 任意の十分大きい k に対し、 $n \geq 1.99^k$ をみたす n であって、 B が確実に勝つことは不可能であるものが存在する。

Language: Japanese

試験時間：4時間30分

各問7点



53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: Japanese

Day: 2

2012年7月11日(水)

問題 4. 整数に対して定義され整数値をとる関数 f であって, $a + b + c = 0$ をみたす任意の整数 a, b, c に対して

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

問題 5. $\angle BCA = 90^\circ$ である三角形 ABC について, C から AB に下ろした垂線の足を D とする. X を線分 CD 上の端点でない点とする. K は線分 AX 上の $BK = BC$ をみたす点とし, 同様に, L は線分 BX 上の $AL = AC$ をみたす点とする. M を AL と BK の交点とする.

このとき, $MK = ML$ であることを示せ.

問題 6. 以下をみたす非負整数 a_1, a_2, \dots, a_n が存在するような正の整数 n をすべて求めよ :

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Language: Japanese

試験時間 : 4 時間 30 分

各問 7 点