2012 年 7 月 10 日 (火)

問題 1. 三角形 ABC において, 角 A 内の傍接円の中心を J とする. この傍接円は辺 BC と点 M で接し, 直線 AB, AC とそれぞれ点 K, L で接する. 直線 LM と直線 BJ は点 F で交わり, 直線 KM と直線 CJ は点 G で交わる. 直線 AF と直線 BC の交点を S, 直線 AG と直線 BC の交点を T とする.
このとき, M が ST の中点であることを証明せよ.

ただし, 三角形 ABC の角 A 内の**傍接円**とは, 辺 BC および, 辺 AB の B 側への延長, 辺 AC の C 側への延長に接する円のことである.

問題 2. $n \geqq 3$ を整数とし, $a_2, a_3, \ldots, a_n$ を $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ をみたす正の実数とする. このとき,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n \;>\; n^n$$

が成り立つことを示せ.

問題 3. **うそつき数当てゲーム**は, 2 人のプレーヤー A と B によって行われるゲームである. このゲームのルールは, あらかじめ双方のプレイヤーに知らされている正の整数 k, n に依存する.
ゲームの開始時に, A は $1 \leqq x \leqq N$ をみたす整数 x, N を選ぶ. A は N を B に正直に伝え, x は秘密にする. その後, B は x についての情報を得るべく, A に次のようにして質問をしていく : B は正の整数からなる集合 S を指定し (以前の質問で指定した S と同じでもよい), x が S に属するかを A に尋ねる. B はこのような質問を何回でもすることができる. A は B の各質問に対し, 直ちに「はい」か「いいえ」で答えなければならないが, 何回でも嘘をつくことができる. ただし, どの連続する $k+1$ 個の回答についても, そのうち少なくとも 1 個の回答は真実でなければならない.
B が望むだけ質問を行った後, B は高々 n 個の正の整数からなる集合 X を指定しなければならない. x が X に属するならば B の勝ちであり, そうでなければ B の負けである. このとき, 以下のことを証明せよ :

1. $n \geqq 2^k$ ならば, B は確実に勝つことが可能である.
2. 任意の十分大きい k に対し, $n \geqq 1.99^k$ をみたす n であって, B が確実に勝つことは不可能であるものが存在する.

試験時間 : 4 時間 30 分
各問 7 点

53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Language: **Japanese**

Day: **2**

2012 年 7 月 11 日 (水)

問題 4. 整数に対して定義され整数値をとる関数 f であって, $a+b+c=0$ をみたす任意の整数 a, b, c に対して

$$f(a)^2+f(b)^2+f(c)^2 \ = \ 2f(a)f(b)+2f(b)f(c)+2f(c)f(a)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

問題 5. $\angle BCA=90^\circ$ である三角形 ABC について, C から AB に下ろした垂線の足を D とする. X を線分 CD 上の端点でない点とする. K は線分 AX 上の $BK=BC$ をみたす点とし, 同様に, L は線分 BX 上の $AL=AC$ をみたす点とする. M を AL と BK の交点とする.

このとき, $MK=ML$ であることを示せ.

問題 6. 以下をみたす非負整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ が存在するような正の整数 n をすべて求めよ：

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\cdots+\frac{1}{2^{a_n}} \ = \ \frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\cdots+\frac{n}{3^{a_n}} \ = \ 1.$$

試験時間： 4 時間 30 分
各問 7 点