*2013*年 *7*月 *23*日火曜日

問題 1. 任意の正の整数の組 (k, n) に対して，ある k 個の（相異なるとは限らない）正の整数 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ が存在して

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$$

となることを示せ.

問題 2. 4027 個の点が平面上にある．この点の配置が**コロンビア風**であるとは, それらが 2013 個の赤い点と 2014 個の青い点からなり, どの 3 点も同一直線上にないことである．平面上に何本かの直線を引くと, 平面はいくつかの領域に分かれる．あるコロンビア風の点の配置に対し, 以下の 2 つの条件をみたす直線の集合は**良い**と定義する：

- どの直線も配置中の点を通らない.
- 直線によって分けられたどの領域も, 両方の色の点を含むことはない.

どのようなコロンビア風の配置に対しても, k 本の直線からなる良い集合が存在するような k の最小値を求めよ.

問題 3. 三角形 ABC の $\angle A$ 内の傍接円が辺 BC と接する点を A_1 とする．同様に $\angle B$ 内の傍接円と $\angle C$ 内の傍接円を用いて, それぞれ辺 CA 上の点 B_1 と辺 BC 上の点 C_1 を定義する．三角形 $A_1B_1C_1$ の外心が三角形 ABC の外接円上にあるとき, 三角形 ABC は直角三角形であることを示せ.

三角形 ABC の $\angle A$ 内の**傍接円**とは, 辺 BC, 辺 AB の点 B 側への延長線, および辺 AC の点 C 側への延長線に接する円のことをさす．$\angle B$, $\angle C$ 内の傍接円も同様に定める.

時間：*4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

2013 年 *7* 月 *24* 日水曜日

問題 4. 鋭角三角形 ABC の垂心を H とし, W を辺 BC 上の (B, C とは異なる) 点とする. B から AC へ下ろした垂線の足を M, C から AB へ下ろした垂線の足を N とする. ω_1 を三角形 BWN の外接円とし, ω_1 上の点 X を WX が ω_1 の直径であるようにとる. 同様に, ω_2 を三角形 CWM の外接円とし, ω_2 上の点 Y を WY が ω_2 の直径であるようにとる. X, Y, H は同一直線上にあることを示せ.

問題 5. $\mathbb{Q}_{>0}$ を正の有理数の集合とする. $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ を次の 3 つの条件をみたす関数とする：

(i) すべての $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $f(x)f(y) \geqq f(xy)$,

(ii) すべての $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $f(x+y) \geqq f(x) + f(y)$,

(iii) ある有理数 $a > 1$ が存在して $f(a) = a$.

このとき, すべての $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対して $f(x) = x$ となることを示せ.

問題 6. n を 3 以上の整数とする. 円周上の $n+1$ 個の点を, 円周を $n+1$ 等分するようにとる. これらの点に 0 から n までの数字を 1 つずつ番号付けする方法を考える. 2 つの番号付けは, 一方が他方を回転して得られるとき, 同じ番号付けとみなす. 番号付けが**美しい**とは, $a < b < c < d$ かつ $a+d = b+c$ をみたすすべての番号の組 (a, b, c, d) について, 番号 a が付いた点と番号 d が付いた点を結ぶ弦と, 番号 b が付いた点と番号 c が付いた点を結ぶ弦が交わらないことをいう.

美しい番号付けの個数を M とし, $x + y \leqq n$ かつ x と y の最大公約数が 1 であるような正の整数の組 (x, y) の個数を N とする. このとき,

$$M = N + 1$$

を示せ.

時間：*4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.