Language: **Japanese**

Day: **1**

2014 年 *4* 月 *12* 日 土曜日

問題 1. 次の条件をみたす実数 t をすべて求めよ：

> 三辺の長さが a, b, c である三角形が存在するような任意の実数 a, b, c について, 三辺の長さが $a^2 + bct, b^2 + cat, c^2 + abt$ である三角形が存在する.

問題 2. 三角形 ABC の辺 AB, AC 上 (端点は含まない) にそれぞれ点 D, E があり, $DB = BC = CE$ をみたしている. 直線 CD と BE の交点を F, 三角形 ABC の内心を I, 三角形 DEF の垂心を H とし, また, 三角形 ABC の外接円の弧 $\widehat{BAC}$ の中点を M とする. このとき, I, H, M が同一直線上にあることを示せ.

問題 3. 正の整数 m に対し, $d(m)$ で m の正の約数の個数を表し, $\omega(m)$ で m の異なる素因数の個数を表す. k を正の整数とするとき, 次の 2 つの条件をみたす正の整数 n が無限個存在することを示せ.

- $\omega(n) = k$.
- $a + b = n$ なる任意の正の整数 a, b について, $d(n)$ が $d(a^2 + b^2)$ を割り切らない.

試験時間: 4 時間 30 分
各問 7 点

Language: **Japanese**

Day: 2

2014 年 *4* 月 *13* 日 日曜日

問題 4. 次の条件をみたす整数 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ が存在するような, 2 以上の整数 n をすべて求めよ：

$0 < i < n$, $0 < j < n$, $i \neq j$ であり, n が $2i + j$ を割りきるならば, $x_i < x_j$ である.

問題 5. n を正の整数とする. n 個の箱があり, それぞれの箱には非負整数個の石が入っている. いま, 次の操作を行うことができる：

1 つの箱を選んで 2 個の石を取り出し, 1 個の石を捨て, もう 1 個の石を別の箱を選んで入れる.

石の初期状態が**可解**であるとは, 有限回 (0 回でもよい) の操作で, 空の箱がない状態にできることをいう. 可解でない初期状態であって, どの箱に新しく 1 個の石を追加したときも可解となるようなものをすべて求めよ.

問題 6. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$$

が成り立つものをすべて求めよ.

試験時間: 4 時間 30 分
各問 7 点