2014 年 7 月 8 日火曜日

問題 1. $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は正の整数からなる狭義単調増加数列であるとする．このとき,

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leqq a_{n+1}$$

をみたす正の整数 n がちょうど 1 つ存在することを示せ.

問題 2. n を 2 以上の整数とする．$n \times n$ のマス目における**平和**な配置とは, どの行と列にもちょうど 1 個の駒があるように n 個の駒が配置されているものをいう．次の条件をみたす正の整数 k の最大値を求めよ：

> 条件：$n \times n$ のマス目における任意の平和な配置に対し, 駒を一つも含まない $k \times k$ のマス目が存在する.

問題 3. 凸四角形 $ABCD$ は $\angle ABC = \angle CDA = 90°$ をみたしている．A から BD に下ろした垂線の足を H とする．2 点 S, T をそれぞれ辺 AB, AD 上に, H が三角形 SCT の内部に存在するようにとる.

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°$$

であるとき, 直線 BD は三角形 TSH の外接円に接することを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です.

2014 年 7 月 9 日水曜日

問題 4. 鋭角三角形 ABC の辺 BC 上に 2 点 P, Q があり, $\angle PAB = \angle BCA$, $\angle CAQ = \angle ABC$ をみたしている. 2 点 M, N はそれぞれ直線 AP, AQ 上の点であり, P は AM の中点, Q は AN の中点である. このとき, 直線 BM と CN は三角形 ABC の外接円上で交わることを示せ.

問題 5. ケープタウン銀行は, 任意の正の整数 n について額面が $\frac{1}{n}$ の硬貨を発行している. これらの硬貨を合計金額が $99 + \frac{1}{2}$ を超えないように何枚か集めた (同じ額面の硬貨が複数枚含まれていてもよい). このとき, 集めた硬貨を 100 個以下のグループに分割して, 各グループに含まれる硬貨の金額の合計が 1 以下であるようにできることを示せ.

問題 6. 平面上の直線の集合が**一般の位置**にあるとは, その集合に属するどの 2 本の直線も平行ではなく, かつどの 3 本の直線も 1 点で交わらないことをいう. 一般の位置にある直線の集合は平面をいくつかの領域に分割するが, そのうちで面積が有限のものを**有限領域**と呼ぶ.

十分大きなすべての整数 n について, 任意の一般の位置にある n 本の直線の集合から次の条件をみたすように $\sqrt{n}$ 本以上の直線を選ぶことができることを示せ.

> 条件：選ばれた直線を青く塗ったとき, 境界がすべて青く塗られているような有限領域が存在しない.

注：$\sqrt{n}$ を $c\sqrt{n}$ (c は定数) に置き換えたうえでこの問題を解いた答案に対しては, その定数 c の値に応じて得点を与える.

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です.