EGMO | 2015
European Girls' Mathematical Olympiad
Minsk, Belarus

*2015* 年 *4* 月 *16* 日 木曜日

**問題 1.** 三角形 $ABC$ を鋭角三角形とし, $C$ から辺 $AB$ に下ろした垂線の足を $D$ とする. 角 $ABC$ の二等分線と $CD$ の交点を $E$ とし, 三角形 $ADE$ の外接円を $\omega$ とおく. 角 $ABC$ の二等分線と $\omega$ の交点のうち $E$ でない方を $F$ とする. $\angle ADF = 45^\circ$ であるとき, $CF$ は $\omega$ に接することを示せ.

**問題 2.** $2 \times 1$ または $1 \times 2$ のタイルをドミノとよぶ. $n^2$ 個のドミノを重ならないように $2n \times 2n$ のマス目に置く方法であり, 以下の条件をみたすものは何通りあるか：

> どの $2 \times 2$ のマス目についても, 同じ行または同じ列にある 2 つのマスであってどちらもドミノで覆われていないようなものが存在する.

**問題 3.** $n, m$ を 1 より大きい整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を $n^m$ 以下の正の整数とする. このとき, $n$ 以下の正の整数 $b_1, b_2, \ldots, b_m$ であり,

$$\gcd(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_m + b_m) < n$$

をみたすものが存在することを示せ. ただし, $\gcd(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ は $x_1, x_2, \ldots, x_m$ の最大公約数を表す.



試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点

*2015* 年 *4* 月 *17* 日 金曜日

**問題 4.**　正の整数からなる無限列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ であり, 任意の正の整数 $n$ について

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

をみたすものは存在するか.

**問題 5.**　$m, n$ は正の整数であり, $m > 1$ をみたしている. アナスタシアは整数 $1, 2, \ldots, 2m$ を $m$ 個のペアに分割し, そのあとボリスは各ペアから 1 個ずつ整数を選び, その総和を求める. このとき, アナスタシアはうまく分割をすることで, ボリスが総和を $n$ にできないようにすることができることを示せ.

**問題 6.**　$ABC$ を $AB \neq AC$ なる鋭角三角形とする. 三角形 $ABC$ の垂心を $H$, 重心を $G$ とする. 直線 $AG$ と三角形 $ABC$ の外接円の交点のうち $A$ でない方を $P$ とし, 直線 $BC$ について $P$ と対称な点を $P'$ とする. このとき, $\angle CAB = 60°$ と $HG = GP'$ が同値であることを示せ.

　ただし, $XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする.



試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点