2015 年 7 月 10 日金曜日

問題 1. 平面上の有限個の点からなる集合 $\mathcal{S}$ について, どの相異なる $\mathcal{S}$ の 2 つの元 A, B についても $AC = BC$ をみたす $\mathcal{S}$ の元 C が存在するとき, $\mathcal{S}$ は**平衡集合**であるという. また, どの相異なる $\mathcal{S}$ の 3 つの元 A, B, C についても $PA = PB = PC$ をみたす $\mathcal{S}$ の元 P が存在しないとき, $\mathcal{S}$ は**非中心的**であるという.

(a) 任意の整数 $n \geqq 3$ について, n 点からなる平衡集合が存在することを示せ.

(b) n 点からなる非中心的な平衡集合が存在するような整数 $n \geqq 3$ をすべて決定せよ.

問題 2. 正の整数の組 (a, b, c) であり,

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

がいずれも 2 のべき乗であるものをすべて求めよ.

ただし, 2 のべき乗とは, 非負整数 n を用いて 2^n と表すことができる整数のことをいう.

問題 3. 鋭角三角形 ABC は $AB > AC$ をみたしている. 三角形 ABC の外接円を Γ, 垂心を H, A から対辺におろした垂線の足を F とおく. また, 辺 BC の中点を M とおく. 点 Q を Γ 上の点で $\angle HQA = 90^\circ$ をみたすものとし, 点 K を Γ 上の点で $\angle HKQ = 90^\circ$ をみたすものとする. A, B, C, K, Q は相異なる点であり, この順に Γ 上にあるとする.

このとき, 三角形 KQH の外接円と三角形 FKM の外接円は互いに接することを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です.

2015 年 7 月 11 日土曜日

問題 4. 三角形 ABC の外接円を Ω, 外心を O とする．A を中心とする円 Γ が線分 BC と点 D, E で交わっており, B, D, E, C はすべて相異なる点であって, この順に直線 BC 上にあるものとする．Γ と Ω の交点を F, G とする．ただし, A, F, B, C, G はこの順で Ω 上に並んでいるものとする．三角形 BDF の外接円と線分 AB の交点のうち B でない方を K, 三角形 CGE の外接円と線分 CA の交点のうち C でない方を L とおく．

直線 FK, GL が相異なり, 点 X で交わるとする．このとき, X は直線 AO 上に存在することを示せ．

問題 5. $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする．関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

が成り立つものをすべて求めよ．

問題 6. 整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ は以下の条件をみたしている：

(i) 任意の $j \geqq 1$ について $1 \leqq a_j \leqq 2015$

(ii) 任意の $1 \leqq k < \ell$ について $k + a_k \neq \ell + a_\ell$

このとき, 正の整数 b, N が存在し, $n > m \geqq N$ をみたす任意の整数 m, n に対して

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leqq 1007^2$$

が成り立つことを示せ．

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です．