2016 年 7 月 11 日月曜日

問題 1. 三角形 BCF は角 B を直角にもつ直角三角形である．点 A を直線 CF 上の点で $FA=FB$ かつ点 F が線分 AC 上にあるようなものとする．点 D を $DA=DC$ かつ直線 AC が $\angle DAB$ の二等分線となるように選ぶ．点 E を $EA=ED$ かつ直線 AD が $\angle EAC$ の二等分線となるように選ぶ．さらに, 点 M を線分 CF の中点とする．点 X を $AMXE$ が平行四辺形となるように選ぶ (このとき $AM \parallel EX$ かつ $AE \parallel MX$ となるようにする)．このとき, 3 直線 BD, FX, ME は一点で交わることを示せ．

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．

問題 2. n を正の整数とする．$n \times n$ のマス目の各マスに, 次の 2 条件を満たすように I, M, O のうちいずれか 1 文字を書き込むことを考える：

- 各行, 各列には I, M, O の各文字がちょうど 3 分の 1 ずつ含まれる．
- 各斜線について, その斜線に含まれるマスの数が 3 の倍数であれば, その斜線には I, M, O の各文字がちょうど 3 分の 1 ずつ含まれる．

このようなことが可能な n をすべて求めよ．

注：$n \times n$ のマス目の各行, 各列は上および左から順に 1 から n まで番号をつけることができる．したがって, 各マスは $1 \leqq i, j \leqq n$ を満たす正整数の組 (i, j) に対応付けられる．このとき, **斜線**とは $i+j$ が一定となるようなマス (i, j) 全体からなる集合, および $i-j$ が一定となるようなマス (i, j) 全体からなる集合のことであり, 合計 $4n-2$ 個存在する．

問題 3. 座標平面上に凸多角形 $P = A_1A_2 \cdots A_k$ がある．$A_1, A_2, \ldots, A_k$ は同一円周上にあり, その座標は全て整数である．S を P の面積とする．正の奇数 n は各辺の長さの 2 乗を割りきるという．このとき、$2S$ は n で割りきれる整数であることを示せ．

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です．

2016 年 7 月 12 日火曜日

問題 4. 正の整数の集合が**香り高い**とは, 少なくとも 2 つの元をもち, かつ任意の元について同じ素因数をもつ別の元が存在することをいう. $P(n) = n^2 + n + 1$ とする. このとき, 正の整数 b であって, 集合

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

が香り高いような非負整数 a が存在するもののうち, 最小の値を求めよ.

問題 5. 両辺にそれぞれ 2016 個の 1 次の因数を持つ方程式

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

が黒板に書かれている. これらの 4032 個の 1 次の因数のうち k 個をうまく選んで消すことで, 次の 2 条件をみたすようにしたい：

- 両辺にそれぞれ少なくとも 1 つずつ因数が残る.
- できあがった方程式は, 実数解をもたない.

このようなことが可能な正の整数 k のうち, 最小の値を求めよ.

問題 6. n を 2 以上の整数とする. 平面上に n 本の線分があり, どの 2 本も端点以外で交点をもち, どの 3 本も 1 点で交わらないとする. 晋一君はそれぞれの線分についていずれかの端点を選び, もう片方の端点を向くように 1 匹ずつカエルを配置する. 次に, 晋一君は $n-1$ 回手をたたく. 晋一君が 1 回手をたたくごとに, それぞれのカエルは線分上の隣の交点に跳び移る. ただし, それぞれのカエルは移動する向きを変えないとする. 晋一君の目標は, うまくカエルを配置することで, どの 2 匹のカエルも同時に同じ点にいることがないようにすることである.

(a) n が奇数のとき, 晋一君は必ず目標を達成できることを示せ.

(b) n が偶数のとき, 晋一君は決して目標を達成できないことを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です.