試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 26 回日本数学オリンピック春の合宿 2016 年 3 月 24 日 (木)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 1 問　鋭角三角形 ABC があり, 辺 BC の中点を M とする. $\angle BAC$ の二等分線を ℓ とし, 三角形 ABC の外接円の C における接線と ℓ との交点を D とする. ℓ 上に点 H を, $\angle ABH = 90^\circ$ であるようにとる. 三角形 CDH の外接円と三角形 ABC の外接円の交点のうち C でない方を P とおくとき, $\angle CPM = \angle ACB$ を示せ.

第 2 問　A を相異なる n 個の正の整数からなる集合としたとき, 次の条件をみたすような部分集合の組 (A_1, A_2) を**良い分割**とよぶ :

- $A_1 \neq \phi$, $A_2 \neq \phi$.
- $A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cup A_2 = A$.
- A_1 の元すべての最小公倍数と A_2 の元すべての最大公約数が等しい.

ちょうど 2015 個の良い分割をもつ A が存在するような n の最小値を求めよ.
　ただし, ϕ で空集合を表すものとする.

第 3 問　n を 2 以上の整数とする. 2 つの実数係数多項式 $P(x), Q(x)$ が**そっくり**であるとは, 1 以上 n 以下の任意の整数 i に対し, 列 $P(2015i), P(2015i-1), \ldots, P(2015i-2014)$ が $Q(2015i), Q(2015i-1), \ldots, Q(2015i-2014)$ の並び替えになっていることをいう.

(a) $n+1$ 次の異なる 2 つの多項式であって, そっくりなものが存在することを示せ.
(b) n 次の異なる 2 つの多項式であって, そっくりなものは存在しないことを示せ.

以 上

第 26 回日本数学オリンピック春の合宿 2016 年 3 月 25 日 (金)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 4 問　m, n を $m > n$ をみたす正の整数とする. $k = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して $x_k = \dfrac{m+k}{n+k}$ とおく. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ がすべて整数のとき, $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$ はある奇素数で割りきれることを示せ.

第 5 問　有理数に対して定義され有理数値をとる関数の組 (f, g) であって, 任意の有理数 x, y に対して

$$f\bigl(f(x) + yg(x)\bigr) = (x+1)g(y) + f(y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

第 6 問　2015 人の人がいる. 最初はこのうち 1 人だけが IMO 熱に感染しているが, 誰なのかは分からない. 2 人の人が握手をすると, 握手した 2 人の一方の人が IMO 熱に感染していた場合, もう一方の人も感染してしまう. このとき, 最初の感染者が誰であるかによらず 2015 人全員に感染させるためには, 最低何回握手が行われる必要があるか.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第3日**

第 26 回日本数学オリンピック春の合宿 2016 年 3 月 26 日 (土)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 7 問　実数 k は, 任意の 2 以上の整数 n と正の実数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ に対して

$$\frac{1}{a_0+a_1}+\frac{1}{a_0+a_1+a_2}+\cdots+\frac{1}{a_0+a_1+\cdots+a_n}<k\left(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

をみたす. このような k としてありうる最小の値を求めよ.

第 8 問　鋭角三角形 ABC において, M を辺 AC の中点とする. 円 ω は B と M を通り, 辺 AB, BC とそれぞれ B とは異なる点 P, Q で交わる. T を, 四角形 $BPTQ$ が平行四辺形をなすような点とする. T が三角形 ABC の外接円上にあるとき, $\dfrac{BT}{BM}$ の値を求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 9 問　$p<q<r<s$ である素数の組 (p,q,r,s) であって,

$$p^s-r^q=3$$

をみたすものをすべて求めよ.

以　上

第 26 回日本数学オリンピック春の合宿　2016 年 3 月 27 日 (日)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 10 問　2015×2015 のマス目がある. このマス目の相異なる n マスに $1, 2, \ldots, n$ の数字を 1 つずつ書き込むと, 次の条件をみたしていた :

- 1 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 i について, i が書き込まれたマスと $i+1$ が書き込まれたマスは辺を共有し, n が書き込まれたマスと 1 が書き込まれたマスは辺を共有する. また, 数字を書き込まれたマスの組であって辺を共有するものは上記以外にない.
- $1 \leqq i < j \leqq n$ なる任意の整数 i, j に対して, i と j が書き込まれたマスが頂点のみを共有するならば, $\min\{j-i, n+i-j\} = 2$ である.

このとき, n としてありうる最大の値を求めよ.

第 11 問　$a_0, a_1, \ldots$ と $b_0, b_1, \ldots$ は正の整数からなる数列であって, $a_0, b_0 \geqq 2$ および, 任意の非負整数 n に対して

$$a_{n+1} = \gcd(a_n, b_n) + 1, \quad b_{n+1} = \mathrm{lcm}(a_n, b_n) - 1$$

をみたすものとする. このとき, ある非負整数 N と正の整数 t が存在して, N 以上の任意の整数 n に対して $a_{n+t} = a_n$ が成り立つことを示せ. ただし, 正の整数 x, y に対し, $\gcd(x, y)$, $\mathrm{lcm}(x, y)$ でそれぞれ x と y の最大公約数, 最小公倍数を表すものとする.

第 12 問　凸四角形 $ABCD$ において, P, Q, R, S をそれぞれ辺 AB, BC, CD, DA 上の点とする. 線分 PR と線分 QS の交点を O とする. 四角形 $APOS$, $BQOP$, $CROQ$, $DSOR$ がいずれも内接円をもつとき, 3 直線 AC, PQ, RS は 1 点で交わるか, 互いに平行であることを示せ.

以　上