2017 年 *4* 月 *8* 日 土曜日

問題 1. 凸四角形 $ABCD$ は $\angle DAB = \angle BCD = 90°$, $\angle ABC > \angle CDA$ をみたしている．Q, R はそれぞれ線分 BC, CD 上の点であり, 直線 QR は直線 AB, AD とそれぞれ P, S で交わっている．BD の中点を M, QR の中点を N とする．$PQ = RS$ が成り立っているとき, 4 点 M, N, A, C は同一円周上にあることを示せ．

問題 2. $\mathbb{Z}_{>0}$ で正の整数全体からなる集合を表す．正の整数 k であって, 次をみたすもののうち最小のものを求めよ．

$\mathbb{Z}_{>0}$ を k 色で塗り分ける方法と関数 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して以下をみたす：

(i) 同じ色で塗られた任意の正の整数 m, n に対して, $f(m+n) = f(m) + f(n)$ が成立する．

(ii) 正の整数 m, n であって, $f(m+n) \neq f(m) + f(n)$ をみたすものが存在する．

ただし, $\mathbb{Z}_{>0}$ を k 色で塗り分けるとは, 各正の整数に対して k 色のうちの 1 つを割り当てることである．また, 条件 (i) と (ii) のいずれにおいても, 正の整数 m と n は相異なる必要はない．

問題 3. 平面上にどの 3 直線も 1 点で交わらないような 2017 本の直線がある．かたつむり君ははじめある直線上の交点でない点にいて, 以下の条件をみたすように直線上を動く：かたつむり君は 2 直線の交点に達するまでは直線に沿って動き, 交点に達すると左または右に曲がる．曲がる方向は左右が交互になるようにする．交点以外では動く方向を変えないとする．

このとき, 一度通った線分を逆向きにもう一度通ることはありうるか．

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点

2017 年 *4* 月 *9* 日 日曜日

問題 4. n を正の整数, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ を正の整数とする. $t_n + 1$ 人の人が, どの 2 人組についても高々1 回しか対戦しないように, チェスの大会を行う. 以下の 2 つの条件を同時にみたすような対戦の仕方が存在することを示せ：

(i) どの人の対戦回数も $t_1, t_2, \ldots, t_n$ のいずれかである.

(ii) 各 $1 \leqq i \leqq n$ に対し, ちょうど t_i 回対戦した人が存在する.

問題 5. n を 2 以上の整数とする. n 個の正の整数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が**高級**であるとは, ある正の整数 k が存在して,

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

をみたすことをいう.

a) 2 以上の整数 n であって, 高級な n 個の正の整数の組が存在するようなものをすべて求めよ.

b) 任意の正の奇数 m に対して, ある 2 以上の整数 n が存在して, m がある高級な n 個の正の整数の組に属すことを示せ.

ただし, 条件式の左辺は n 個の因数の積である.

問題 6. どの辺の長さも相異なる鋭角三角形 ABC がある. 三角形 ABC の重心 G と外心 O を辺 BC, CA, AB に関して対称移動させた点をそれぞれ G_1, G_2, G_3 と O_1, O_2, O_3 とする. このとき, 三角形 G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A, ABC それぞれの外接円は共通の点を通ることを示せ.

ただし, 三角形の重心とは, 3 本の中線の交点のことである. また中線とは, 三角形の頂点と, その対辺の中点を結ぶ直線のことである.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点