2017 年 7 月 18 日火曜日

問題 1. $a_0 > 1$ をみたすような各整数 a_0 に対して, 数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を以下のように定める：

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \sqrt{a_n}\text{ が整数のとき}, \\ a_n + 3 & \text{そうでないとき}, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

このとき, ある A が存在して $a_n = A$ をみたす n が無数にあるような a_0 をすべて求めよ.

問題 2. $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy)$$

が成り立つものをすべて求めよ.

問題 3. ハンターと見えないうさぎが平面上でゲームを行う. うさぎが最初にいる点 A_0 とハンターが最初にいる点 B_0 は一致している. $n-1$ 回のラウンドが終わった後, うさぎは点 A_{n-1} におり, ハンターは B_{n-1} にいる. n 回目のラウンドにおいて, 次の 3 つが順に行われる：

(i) うさぎは A_{n-1} からの距離がちょうど 1 であるような点 A_n に見えないまま移動する.

(ii) 追跡装置がある点 P_n をハンターに知らせる. ただし, P_n と A_n の距離が 1 以下であるということだけが保証されている.

(iii) ハンターは B_{n-1} からの距離がちょうど 1 であるような点 B_n に周りから見えるように移動する.

うさぎがどのように移動するかにかかわらず, またどの点が追跡装置によって知らされるかにかかわらず, ハンターは 10^9 回のラウンドが終わった後に必ずうさぎとの距離を 100 以下にすることができるか.

Language: Japanese

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です.

2017 年 7 月 19 日水曜日

問題 4. 円 Ω 上に RS が直径でないような異なる 2 点 R, S がある．Ω の R における接線を ℓ とする．点 T は線分 RT の中点が S となるような点とする．Ω の劣弧 RS 上に点 J があり，三角形 JST の外接円 Γ は ℓ と異なる 2 点で交わっている．A を Γ と ℓ の交点のうち R に近い方の点とする．直線 AJ は K で Ω と再び交わっている．このとき，直線 KT は Γ に接することを示せ．

問題 5. N を 2 以上の整数とする．身長が相異なる $N(N+1)$ 人のサッカー選手が 1 列に並んでいる．鈴木監督は $N(N-1)$ 人の選手を列から取り除き，残った $2N$ 人の選手からなる新たな列が次の N 個の条件をみたすようにしたい：

(1) 身長が最も高い 2 人の選手の間には誰もいない．

(2) 身長が 3 番目に高い選手と 4 番目に高い選手の間には誰もいない．

⋮

(N) 身長が最も小さい 2 人の選手の間には誰もいない．

このようなことが必ず可能であることを示せ．

問題 6. 順序づけられた整数の組 (x, y) が**原始的**であるとは，x と y の最大公約数が 1 であることをいう．原始的な組からなる有限集合 S が与えられたとき，正の整数 n と整数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ であって，S に含まれる任意の組 (x, y) に対して

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1$$

をみたすようなものが存在することを示せ．

Language: Japanese

時間：4 時間 30 分
各問題は 7 点満点です．