第1日

第 27 回日本数学オリンピック春の合宿　　2017 年 3 月 23 日 (木)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 1 問　n, k は $n > k$ をみたす正の整数である. A さん, B さんが次のようなゲームをしたときに, 必ず B さんが勝つことができるような最小の正の整数 m を求めよ. ただし, B さんは n, k の値をゲーム開始時に知らされている.

- A さんは n 桁の 2 進数 X を 1 つ決め, X をちょうど k 桁変えて得られるような 2 進数をすべて黒板に書く.
- B さんは黒板に書かれた数を見たうえで, ホワイトボードに m 個の数を書く.
- X がホワイトボードに書かれていれば B さんの勝ちである.

ただし, n 桁の 2 進数とは, 0 または 1 が n 個並んだものであるとする. たとえば, 3 桁の 2 進数は 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 の 8 個である.

第 2 問　三角形 ABC は $AB \neq AC$ をみたす. 三角形 ABC の外接円を Γ とし, 内心を I とする. M を辺 BC の中点とし, I から辺 BC におろした垂線の足を D とする. I を通り直線 AI に垂直な直線は辺 AB と辺 AC にそれぞれ F と E で交わる. 三角形 AEF の外接円と Γ の交点のうち, A でない方を X とする. このとき, 直線 XD と直線 AM は Γ 上で交わることを示せ. ただし, UV で線分 UV の長さを表すものとする.

第 3 問　正の整数列 $a_1, a_2, \ldots$ および $r_1, r_2, \ldots$ であり, 次をみたすものが存在するような正の整数 k をすべて求めよ.

- $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ が成り立つ.
- 任意の正の整数 n に対して, ${a_1}^k + {a_2}^k + \cdots + {a_n}^k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{r_n}$ が成り立つ.

以　上

試験問題用紙 (1枚中の1) **第2日**

第27回日本数学オリンピック春の合宿 2017年3月24日 (金)

試験時間：4時間30分
問題数：3問
配　点：各問7点

第4問　三角形 ABC は $AB=AC\neq BC$ をみたし，I をその内心とする．直線 BI は辺 AC と D で交わり，D を通り直線 AC に垂直な直線は直線 AI と E で交わる．直線 AC に関して I と対称な点は三角形 BDE の外接円上にあることを示せ．

ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

第5問　n を6と互いに素な5以上の整数とする．正 n 角形の各頂点を，どの色についてもその色で塗られた頂点が奇数個となるように，3色で塗り分けた．このとき，正 n 角形の頂点のうち3つを選んでできる二等辺三角形であって，各頂点の色がすべて異なるようなものがとれることを示せ．

第6問　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって，$f(0)\neq 0$ をみたし，かつ任意の実数 x, y に対して

$$f(x+y)^2=2f(x)f(y)+\max\{f(x^2)+f(y^2), f(x^2+y^2)\}$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

以　上

第 27 回日本数学オリンピック春の合宿　　2017 年 3 月 25 日 (土)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　$n^4+10n^2+2^k$ が平方数となるような, 正の整数の組 (n,k) をすべて求めよ.

第 8 問　正の整数からなる数列 $a_1,a_2,\ldots$ があり, 任意の正の整数 n について

$$a_n > \frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n+2016}$$

をみたしている. このとき, ある正の実数 C が存在し, 任意の正の整数 n について $a_n<C$ が成り立つことを示せ.

第 9 問　n を 3 以上の整数とする. ある国には n 個の島がある. はじめ, IMO 社は異なる 2 つの島の組のうちいくつかの間に双方向のフェリーを運航させており, どの異なる 2 つの島の間もいくつかのフェリーを乗り継いで行き来することができるようになっている.

これから毎年のはじめに, IMO 社はその年開通させるフェリー路線を次のように前年から変更して決めていくことになった：

(1) その間で前の年にフェリーが運航していたような 2 つの異なる島 X, Y を選ぶ.
(2) X と Y の間のフェリーは運休する.
(3) 前の年 X と Y のちょうど片方との間にフェリーが運航していたような X, Y 以外の島については, 新たにもう片方との間にもフェリーを運航させることにする.
(4) これ以外に新たにフェリーを運航または運休することはない.

ただし, (1) の島 X, Y の選び方については, 次のような条件を設けることになった.

条件：どの 1 個以上 $n-1$ 個以下の島の集合 S に対しても, どの時点からみても, その先少なくとも 1 回は X, Y の片方は S に含まれもう片方は S に含まれないように選ぶ.

このとき, ある年とある島が存在し, その年にその島と他のすべての島との間にフェリーが運航していることを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第 4 日**

第 27 回日本数学オリンピック春の合宿　2017 年 3 月 26 日 (日)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 10 問　3 以上の正の整数 n であり, 次をみたすものをすべて求めよ.

> $|a_k|+|b_k|=1\ (k=1,2,\ldots,n)$ をみたすような任意の $2n$ 個の実数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ に対して, 実数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ を次をみたすように選ぶことができる.
>
> $$|x_k|=1\ (k=1,2,\ldots,n),\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}x_ka_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}x_kb_k\right|\leqq 1.$$

第 11 問　正の整数に対して定義され, 正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 m, n に対して, $f(m)+f(n)-mn\neq 0$ かつ $\dfrac{mf(m)+nf(n)}{f(m)+f(n)-mn}$ が整数であるようなものをすべて求めよ.

第 12 問　凸四角形 $ABCD$ は, $\angle ABC=\angle ADC<90^\circ$ をみたす. $\angle ABC$ と $\angle ADC$ の二等分線は直線 AC とそれぞれ異なる点 E, F で交わり, 互いに点 P で交わる. M を線分 AC の中点とし, ω を三角形 BPD の外接円とする. 線分 BM と ω が B でない点 X で交わり, 線分 DM と ω が D でない点 Y で交わっているとする. 直線 XE と直線 YF が点 Q で交わっているとき, 直線 PQ と直線 AC が垂直に交わることを示せ.

以　上