# 2018年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

## 問　題[1]

2018年3月13日 試験時間4時間5題 各問7点

**1.** 三角形 $ABC$ がある. 点 $H$ は三角形 $ABC$ の垂心であり, 点 $M$, $N$ は各々辺 $AB$, $AC$ の中点である. $H$ は四角形 $BMNC$ の内部にあり, 三角形 $BMH$, $CNH$ の外接円は互いに接している. $H$ を通り直線 $BC$ に平行な直線が, 三角形 $BMH$, $CNH$ の外接円とそれぞれ $H$ 以外の点 $K$, $L$ で交わるとする. 直線 $MK$ と $NL$ の交点を $F$, 三角形 $MHN$ の内心を $J$ とするとき, $FJ = FA$ を示せ. ただし, $XY$ で線分 $XY$ の長さを表すものとする.

**2.** $x$ に対して $f(x)$, $g(x)$ を, 以下のように定義する.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \cdots + \frac{1}{x-2018},$$
$$g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017}.$$

このとき, $0 < x < 2018$ をみたす整数でない任意の実数 $x$ について $|f(x) - g(x)| > 2$ が成り立つことを示せ.

**3.** 平面上にある $n$ 個の正方形の配置は, 次の3つの条件をみたすときに美しいという.

(i) 正方形はすべて合同である.

(ii) どの2つの正方形も頂点以外の共有点をもたない.

(iii) 各正方形はちょうど3つの他の正方形と共有点をもつ.

このとき, $n$ 個の正方形からなる美しい配置が存在するような整数 $n$ であって, $2018 \leqq n \leqq 3018$ をみたすようなものはいくつあるか.

**4.** 正三角形 $ABC$ の頂点 $A$ から三角形の内部に向かって出発する光線を考える. この光線は三角形の各辺で反射の法則に従って, すなわち入射角と反射角が等しくなるように反射する. また, 三角形のいずれかの頂点にたどりついたときに停止する. 光線が $n$ 回反射して頂点 $A$ で停止したとき, ありうる $n$ の値をすべて求めよ.

**5.** 係数がすべて整数である多項式 $P(x)$ で, $P(s)$, $P(t)$ が整数となる任意の実数 $s, t$ に対して $P(st)$ も整数であるようなものをすべて求めよ.

以上