2018 年 4 月 11 日水曜日

問題 1. 三角形 ABC は $CA = CB$, $\angle ACB = 120°$ をみたすとし, 辺 AB の中点を M とおく. P を三角形 ABC の外接円上を動く点とし, Q を $QP = 2QC$ をみたす線分 CP 上の点とする. P を通り AB と垂直な直線が直線 MQ と唯一の点 N で交わるとする.

このときある円が存在し, どのように P を動かしても, N がその円上に存在することを示せ.

問題 2. 次の集合を考える：

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} \;\middle|\; k = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

(a) 各 2 以上の整数 x は, 必ずしも異なるとは限らない 1 個以上の A の元の積で表せることを示せ.

(b) 各 2 以上の整数 x について, x を必ずしも異なるとは限らない 1 個以上の A の元の積で表すとき, 必要な元の個数の最小値を $f(x)$ とおく.

整数の組 (x, y) であり, $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, および

$$f(xy) < f(x) + f(y)$$

をみたすものが無数に存在することを示せ.

(ただし, (x_1, y_1) と (x_2, y_2) は, $x_1 \neq y_1$ または $x_2 \neq y_2$ のとき異なる組と考える.)

問題 3. $C_1, \ldots, C_n$ を n 人の EGMO の選手とする. コンテストの後, 彼女たちは次のルールに基づいてレストランの前に一列に並ぶ：

- 料理長は最初の選手の並び順を指定する.
- 料理長は 1 分おきに $1 \leqq i \leqq n$ をみたす整数 i を選ぶ.
  - 選手 C_i よりも前に i 人以上の選手がいるとき, 選手 C_i は 1 ユーロを料理長に支払い, 直前の i 人を抜かして割り込む.
  - 選手 C_i よりも前にいる選手が i 人未満であるとき, レストランが開きこの手順が終了する.

(a) 料理長がいかなる選択をしても, この手順が無限回行われることはないことを示せ.

(b) 各 n について, 料理長が得られる最大の金額を求めよ.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点

2018 年 4 月 12 日 木曜日

問題 4.　1×2 または 2×1 のタイルを**ドミノ**とよぶ.

n を 3 以上の整数とする. $n \times n$ のマス目にそれぞれのドミノがちょうど 2 つのマスを覆い, 互いに重ならないようにドミノを配置する.

それぞれの行および列に対してその**価値**を, その行や列のマスを少なくとも 1 つ覆っているドミノの個数とする. ある正の整数 k が存在して, どの行および列の価値も k であるとき, この配置は**均等**であるという.

任意の n について均等な配置が存在することを示し, 均等な配置で用いられるドミノの個数としてありうる最小の値を求めよ.

問題 5.　Γ を三角形 ABC の外接円とする. 円 Ω は辺 AB に接しており, 直線 AB に関して C と同じ側にある点で Γ に接している. $\angle BCA$ の二等分線が Ω と異なる 2 点 P, Q で交わっているとする.

このとき, $\angle ABP = \angle QBC$ であることを示せ.

問題 6.

(a) $0 < t < \frac{1}{2}$ をみたす任意の実数 t について, 以下の条件をみたすような正の整数 n が存在することを示せ：n 個の正の整数からなる任意の集合 S について, S の異なる 2 つの元 x, y と**非負**整数 m (すなわち $m \geqq 0$) が存在して,
$$|x - my| \leqq ty$$
となる.

(b) $0 < t < \frac{1}{2}$ をみたす各実数 t について, 無限個の正の整数からなる集合 S であって, S の任意の異なる元 x, y および任意の**正の**整数 m (すなわち $m > 0$) が
$$|x - my| > ty$$
をみたすようなものが存在するかを決定せよ.

試験時間：4 時間 30 分
各問 7 点