2018 年 *7* 月 *9* 日 月曜日

問題 1. 鋭角三角形 ABC の外接円を Γ とする．点 D, E をそれぞれ線分 AB, AC 上に $AD = AE$ となるようにとる．BD の垂直二等分線と Γ の劣弧 AB の交点を F, CE の垂直二等分線と Γ の劣弧 AC の交点を G とするとき, 直線 DE, FG は平行 (または同一の直線) であることを示せ.

問題 2. 3 以上の整数 n で, 次の条件をみたす $n+2$ 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ が存在するものをすべて求めよ.

- $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$
- $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$

問題 3. **反パスカル的三角形** とは, 一番下の行以外の数はそのすぐ下のふたつの数の差の絶対値になるように正三角形状に数を並べた配列を指す．たとえば, 以下の配列は 1 以上 10 以下の整数をすべて使った 4 行からなる反パスカル的三角形である.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 4 & & & \\
 & & 2 & & 6 & & \\
 & 5 & & 7 & & 1 & \\
8 & & 3 & & 10 & & 9
\end{array}
$$

2018 行からなる反パスカル的三角形であって，1 以上 $1+2+\cdots+2018$ 以下の整数をすべて使うものは存在するか？

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

2018 年 *7* 月 *10* 日 火曜日

問題 4.　**サイト**とは, x, y 座標がともに 20 以下の正の整数であるような平面上の点を指す.

最初, 400 個すべてのサイトは空である. エイミーとベンは, エイミーから始めて交互に石を置いていく. エイミーのターンには, エイミーは空のサイトをひとつ選び, 新しい赤い石を置く. このとき, 赤い石の置かれたどの 2 つのサイト間の距離も, ちょうど $\sqrt{5}$ になってはいけない. ベンのターンには, ベンは空のサイトをひとつ選び, 新しい青い石を置く. 青い石の置かれたサイトと他の空でないサイト間の距離は任意である. エイミーとベンのどちらかがこれ以上石を置けなくなったら, 2 人は即座に石を置くのをやめる.

ベンの行動によらずエイミーが少なくとも K 個の赤い石を置けるような K の最大値を求めよ.

問題 5.　$a_1, a_2, \ldots$ を正の整数列とする. ある 2 以上の整数 N が存在し, 任意の $n \geqq N$ に対し

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

は整数である. このとき, 正の整数 M が存在し, 任意の $m \geqq M$ に対し $a_m = a_{m+1}$ が成立することを示せ.

問題 6.　凸四角形 $ABCD$ が $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ をみたす. 点 X が四角形 $ABCD$ の内部にあり,

$$\angle XAB = \angle XCD, \angle XBC = \angle XDA$$

をみたす. このとき, $\angle BXA + \angle DXC = 180°$ を示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.