試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 28 回日本数学オリンピック春の合宿 2018 年 3 月 23 日 (金)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 1 問　凸五角形 $ABCDE$ は, $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$, $\angle EDC = \angle CBA$ をみたしている. このとき, 点 E から直線 BC に下ろした垂線と, 直線 AC, BD は 1 点で交わることを示せ.

第 2 問　n を正の整数とする. $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, $\mathcal{A}$ を S の要素に対して定義され S の要素を値にとる関数全体の集合とする. f を $\mathcal{A}$ に含まれる関数とする. $\mathcal{A}$ に含まれる関数 g であって

$$f\bigl(g\bigl(f(m)\bigr)\bigr) = g\bigl(f\bigl(g(m)\bigr)\bigr), \quad m = 1, 2, \ldots, n$$

となるものが f 以外に存在しないとき,

$$\{f(m) \mid m = 1, 2, \ldots, n\} = \bigl\{f\bigl(f(m)\bigr) \mid m = 1, 2, \ldots, n\bigr\}$$

であることを示せ.

第 3 問　$p > q$ をみたす素数の組 (p, q) であって,

$$\frac{(p+q)^{p+q}(p-q)^{p-q} - 1}{(p+q)^{p-q}(p-q)^{p+q} - 1}$$

が整数であるものをすべて求めよ.

以　上

第 28 回日本数学オリンピック春の合宿 2018 年 3 月 24 日 (土)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 4 問　n を 3 以上の整数とする. 平面上の n 点からなる集合 S のうち, どの 3 点も同一直線上にないものを考える. L を S 内の異なる 2 点を通る直線全体の集合とする. L の要素 ℓ に対して, その**分離数**を, 平面を ℓ によって分けてできる 2 つの領域それぞれに属する S の要素の個数の積として定める. このとき, L に属する直線の分離数の総和としてありうる最小の値を求めよ. ただし, 領域は境界を含まないものとする.

第 5 問　正の整数 n であって, 以下の条件をみたす $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 S が存在するものは有限個しかないことを示せ :

- S の元の個数は $\left[\sqrt{n}\right] + 1$ 以上である.
- S の任意の元 x, y について, xy は累乗数である. ここで, 累乗数とはある正の整数 a と 2 以上の整数 b によって a^b と表されるような整数のことである.

ただし, 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表すものとする.

第 6 問　$a_0, a_1, a_2, \ldots$ を整数からなる数列, $b_0, b_1, b_2, \ldots$ を正の整数からなる数列とする. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ かつ, $n = 1, 2, \ldots$ について

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n b_n + a_{n-1} & (b_{n-1} = 1 \text{ のとき}) \\ a_n b_n - a_{n-1} & (b_{n-1} > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立っているとき, a_{2017} と a_{2018} のうちいずれかは 2017 以上であることを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)

第3日

第 28 回日本数学オリンピック春の合宿　　2018 年 3 月 25 日 (日)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　p を素数とする. 2 人の人が次の行動を交互に繰り返すゲームを行う：

> 行動：$\{0, 1, \ldots, p-1\}$ からそれまでに選ばれていない数 i を選び, i に対して 0 以上 9 以下の整数を定める.

ゲームは $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ の元がすべて選ばれたとき終了する. i に対して定まった整数を a_i として, $M = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1}$ とおく. M が p で割りきれるとき先手の勝ちとし, そうでないとき後手の勝ちとする. このとき, 先手には必勝法があることを示せ.

第 8 問　凸四角形 $ABCD$ は内接円を持ち, この中心は I である. 三角形 DAB, BCD の内心をそれぞれ I_a, I_c とし, 三角形 BI_aI_c と三角形 DI_aI_c の外接円の共通外接線が点 X で交わっているとき, 4 点 X, I, I_a, I_c は同一円周上にあることを示せ.

第 9 問　正の整数からなる有限集合 X と Y に対して, X に含まれない正の整数のうち, k 番目に小さいものを $f_X(k)$ と表し,

$$X * Y = X \cup \{f_X(y) \mid y \in Y\}$$

と定める. a, b を正の整数とし, A を a 個の正の整数からなる集合, B を b 個の正の整数からなる集合とするとき, $A * B = B * A$ ならば

$$\underbrace{A * (A * \cdots * (A * (A * A)) \ldots)}_{A\text{ が }b\text{ 個}} = \underbrace{B * (B * \cdots * (B * (B * B)) \ldots)}_{B\text{ が }a\text{ 個}}$$

が成り立つことを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　第4日

第 28 回日本数学オリンピック春の合宿　　2018 年 3 月 26 日 (月)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 10 問　$a_1, a_2, \ldots, a_n, k, M$ を正の整数とし,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k, \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M$$

が成り立っているとする. $M > 1$ のとき, x についての方程式

$$M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = 0$$

は正の実数解をもたないことを示せ.

第 11 問　n を 2 以上の整数とする. 一辺の長さが 1 の小立方体 n^3 個からなる, $n \times n \times n$ の大立方体がある. 各小立方体は, それぞれ 1 色で塗られている. 大立方体内の, n^2 個の小立方体からなる $n \times n \times 1$ の直方体に対して (向きは 3 通りのいずれでもよい), その直方体に現れる色の集合 (同じ色は 1 度しか数えない) を考える. これらの $3n$ 個の集合を, 直方体の向きによって 3 つの組に分けたとき, どの組に含まれるどの集合についても, 同じ集合が他のどちらの組にも存在した. このとき, 大立方体に現れる色の種類数としてありうる最大の値を求めよ.

第 12 問　凸六角形 $ABCC_1B_1A_1$ は, $AB = BC$ をみたしている. また, 点 A_1, B_1, C_1 はある直線 l に関してそれぞれ点 A, B, C と対称な点である. 線分 AC_1 と A_1C の交点を D とし, ω を三角形 ABC の外接円とする. ω と三角形 A_1BC_1 の外接円が B でない点 E で交わるとき, 直線 BB_1 と直線 DE は ω 上で交わることを示せ.

以　上