2019年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2019年3月12日 試験時間4時間5題　各問7点

1. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 a, b に対して $a^2 + f(a)f(b)$ が $f(a) + b$ で割りきれるようなものをすべて求めよ.

2. m を正の整数とする. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. a_1 を正の整数とし, $n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & (a_n < 2^m \text{のとき}) \\ a_n/2 & (a_n \geqq 2^m \text{のとき}) \end{cases}$$

とする. $\{a_n\}$ のすべての項が整数となるような a_1 をすべて求めよ.

3. 辺の長さが相異なる三角形 ABC が円 Γ に内接している. 辺 BC の中点を M とおく. 線分 AM 上に点 P がある. Γ と三角形 BPM の外接円が B と異なる点 D で交わっており, 直線 DP と三角形 CPM の外接円が P と異なる点 X で交わっている. また, Γ と三角形 CPM の外接円が C と異なる点 E で交わっており, 直線 EP と三角形 BPM の外接円が P と異なる点 Y で交わっている. このとき P のとり方によらず三角形 AXY の外接円が T を通るような, A と異なる点 T が存在することを示せ.

4. 2018×2019 のマス目の各マスに整数が書かれている. 各マスに対してそのマスと辺を共有し, そのマスと異なるマスを**近傍**とよぶことにする. 次のような操作を考える.

> いくつかのマスを選び, 選んだ各マスに対してそのマスの近傍に書かれている数の平均を計算する. その後選んだ各マスの数をそのマスに対して計算した数に書き換える.

どのような最初の盤面から始めても, うまく有限回の操作を行うことですべてのマスに書かれている数を等しくできるか.

5. 実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

以上