European Girls' Mathematical Olympiad
Kyiv, Ukraine 2019

Language: **Japanese**

Day: **1**

2019 年 *4* 月 *9* 日 火曜日

問題 1. 実数の組 (a, b, c) であって, $ab + bc + ca = 1$ と

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$$

をともにみたすものをすべて求めよ.

問題 2. n を正の整数とする. $2n \times 2n$ のマス目にいくつかのドミノを次の条件をみたすように置く.

> どのマスについても, そのマスに隣接しているマスのうちちょうど 1 つがドミノに覆われている.

各 n に対して, 置くことができるドミノの数としてありうる最大の値を求めよ.

ただし, ドミノとは 2×1 または 1×2 のタイルである. ドミノはちょうど 2 つのマスを覆うように置かなければならず, 重ねて置くことはできない. また, 2 つのマスが**隣接**しているとは, それらが異なりかつ辺を共有していることをいう.

問題 3. 三角形 ABC は $\angle CAB > \angle ABC$ をみたすとし, その内心を I とする. D を $\angle CAD = \angle ABC$ となるような線分 BC 上の点とする. 点 I を通り, A において直線 AC に接する円を ω とする. ω と三角形 ABC の外接円の交点のうち, A でない方を X とする. このとき, $\angle DAB$ と $\angle CXB$ の二等分線は直線 BC 上で交わることを示せ.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点

2019 年 *4* 月 *10* 日 水曜日

問題 4. 三角形 ABC の内心を I とする．点 B を通り I において直線 AI に接する円が辺 AB と交わる点のうち B でない方を P とする．また, 点 C を通り I において直線 AI に接する円が辺 AC と交わる点のうち C でない方を Q とする．このとき, 直線 PQ は三角形 ABC の内接円に接することを示せ．

問題 5. n を 2 以上の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の整数とする．このとき, 次の 3 つの条件をみたす正の整数 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ が存在することを示せ．

(A) $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $a_i \leqq b_i$ である．

(B) $b_1, b_2, \ldots, b_n$ を n で割った余りはすべて異なる．

(C) 不等式

$$b_1 + \cdots + b_n \leqq n\left(\frac{n-1}{2} + \left[\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right]\right)$$

が成り立つ．

ただし, 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す．

問題 6. アリーナは, ある円の周上に端点がすべて異なるように 2019 本の弦を書き, 次のいずれかの条件をみたす点すべてに印をつける．

(i) 弦の端点 4038 個のうちのいずれかである．

(ii) 2 本以上の弦の交点である．

アリーナはそれぞれの印のついた点に, 以下のように整数を割り当てる．

- 条件 (i) をみたす 4038 個の点のうち 2019 個に 0, 残りの 2019 個に 1 を割り当てる．
- 条件 (ii) をみたすそれぞれの点には整数を 1 つ任意に割り当てる (割り当てる整数は正でなくてもよい)．

各弦において, アリーナは隣り合う 2 つの印のついた点を端点とする線分を考え (印のついた点が k 個ある弦は $k-1$ 個のそのような線分からなる), そのような線分それぞれに対して, 2 つの端点に割り当てられた整数の和を黄色で, 差の絶対値を青色で書き込む．

書き込まれた黄色の数が $N+1$ 個あり, $0, 1, \ldots, N$ がちょうど 1 回ずつ書き込まれているとき, 少なくとも 1 つの青色の 3 の倍数が書き込まれていることを示せ．

ただし, **弦**とは円周上の異なる 2 点を結ぶ線分のことをいう．

時間：4 時間 30 分
各問 7 点