*2019* 年 *7* 月 *16* 日 火曜日

**問題 1.**　$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする．関数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって，任意の整数 $a$, $b$ に対して

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

をみたすものをすべて求めよ．

**問題 2.**　三角形 $ABC$ の辺 $BC$ 上に点 $A_1$ が，辺 $AC$ 上に点 $B_1$ がある．点 $P$, $Q$ はそれぞれ線分 $AA_1$, $BB_1$ 上の点であり，直線 $PQ$ と $AB$ は平行である．点 $P_1$ を，直線 $PB_1$ 上の点で $\angle PP_1C = \angle BAC$ かつ点 $B_1$ が線分 $PP_1$ の内部にあるようなものとする．同様に点 $Q_1$ を，直線 $QA_1$ 上の点で $\angle CQ_1Q = \angle CBA$ かつ点 $A_1$ が線分 $QQ_1$ の内部にあるようなものとする．

このとき，4 点 $P$, $Q$, $P_1$, $Q_1$ は同一円周上にあることを示せ．

**問題 3.**　あるソーシャルネットワークサービスにはユーザーが 2019 人おり，そのうちのどの 2 人も互いに友人であるか互いに友人でないかのどちらかである．

いま，次のようなイベントが繰り返し起きることを考える：

> 3 人のユーザー $A$, $B$, $C$ の組であって，$A$ と $B$, $A$ と $C$ が友人であり，$B$ と $C$ は友人でないようなものについて，$B$ と $C$ が友人になり，$A$ は $B$, $C$ のどちらとも友人ではなくなる．これら以外の 2 人組については変化しないとする．

はじめに，友人の数が 1009 人であるユーザーが 1010 人，友人の数が 1010 人であるユーザーが 1009 人存在するとする．上のようなイベントが何回か起きた後，全てのユーザーの友人の数が高々1 人になることがあることを示せ．

*Language: Japanese*

時間*: 4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です．

*2019* 年 *7*月 *17*日 水曜日

**問題 4.** 以下をみたす正の整数の組 $(k, n)$ をすべて求めよ：

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

**問題 5.** バース銀行は表面に「$H$」が, 裏面に「$T$」が印字されている硬貨を発行している. 康夫君はこれらの硬貨 $n$ 枚を左から右へ一列に並べた. いま, 康夫君が以下のような操作を繰り返し行う：

> ある正の整数 $k$ について, $H$ と書かれている面が表を向いている硬貨がちょうど $k$ 枚あるとき左から $k$ 番目にある硬貨を裏返す. そうでないときは操作を終了する.

たとえば, $n = 3$ で硬貨が「$THT$」のように並んでいるときは, $THT \to HHT \to HTT \to TTT$ と変化し, 康夫君は 3 回で操作を終了する.

(a) どのような初期状態についても, 康夫君は操作を有限回で終了させられることを示せ.

(b) 初期状態 $C$ に対して, $L(C)$ で操作が終了するまでに行われる回数を表すものとする. たとえば $L(THT) = 3$ であり, $L(TTT) = 0$ である. 初期状態 $C$ がありうる $2^n$ 通り全体を動くときの $L(C)$ の平均値を求めよ.

**問題 6.** $AB \neq AC$ をみたす鋭角三角形 $ABC$ の内心を $I$ とする. 三角形 $ABC$ の内接円 $\omega$ は, 辺 $BC$, $CA$, $AB$ とそれぞれ点 $D$, $E$, $F$ で接している. $D$ を通り $EF$ に垂直な直線と $\omega$ が $D$ でない点 $R$ で交わるとする. 直線 $AR$ と $\omega$ が $R$ でない点 $P$ で交わるとする. さらに三角形 $PCE$ と $PBF$ の外接円が $P$ でない点 $Q$ で交わるとする.

このとき, 直線 $DI$ と $PQ$ は, $A$ を通り $AI$ に垂直な直線上で交わることを示せ.

*Language: Japanese*

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.