試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 29 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2019 年 3 月 22 日 (金)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

©2019 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 1 問　$n \neq k$ をみたす正の整数の組 (n, k) であって, 次の条件をみたすものをすべて求めよ.

> 正の整数 s であって, sn の正の約数の個数と sk の正の約数の個数が等しいものが存在する.

第 2 問　実数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ は $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ をみたす. 任意の 2 以上の整数 n に対して, 1 以上 n 以下の整数 k であって

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}$$

をみたすものが存在するとき, $a_{2018} - a_{2017}$ としてありうる最大の値を求めよ.

第 3 問　鋭角三角形 ABC の外心を O とし, 外接円を Ω とする. 点 P を A, B, C と A, B, C の O に関する対称点以外の Ω 上の点とし, 三角形 AOP, BOP, COP の外心をそれぞれ O_A, O_B, O_C とする. 直線 l_A, l_B, l_C はそれぞれ O_A, O_B, O_C を通る BC, CA, AB に垂直な直線である. このとき, l_A, l_B, l_C がなす三角形の外接円は直線 OP に接することを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) 第2日

第 29 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2019 年 3 月 23 日 (土)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配 点 : 各問 7 点

©2019 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 4 問　正の有理数に対して定義され正の有理数値をとる関数 f であって, 任意の正の有理数 x, y に対して

$$f\bigl(x^2 f(y)^2\bigr) = f(x)^2 f(y)$$

をみたすものをすべて求めよ.

第 5 問　非負整数 n を用いて $2^n + 2^{[n/2]}$ で表される整数を**良い数**とよぶ.

(1) 相異なる 2 つ以上の良い数の和で表される良い数が無限個存在することを示せ.
(2) 相異なる 2 つ以上の良い数の和で表せない良い数が無限個存在することを示せ.

ただし, 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す.

第 6 問　k を正の整数とする. IMO 会館は $2k$ 人の選手が参加するチェス大会を行うことにした. 大会では 1 日に 1 試合を行い, 大会全体でどの 2 人の選手も 1 回ずつ試合をする. どの選手も, 出場する最初の試合の日から最後の試合の日まで IMO 会館に滞在する. 毎日 IMO 会館は滞在している選手の人数と同じ枚数の昼食券を発行する. このとき, IMO 会館が発行する昼食券の総数としてありうる最小の値を求めよ.

以 上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　第 3 日

第 29 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2019 年 3 月 24 日 (日)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

©2019 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 7 問　n を正の整数とする. $n+1$ 個のマスが横一列に並んだ盤面があり, 各マスには左から順に 0 から n の番号がつけられている. 0 の位置に n 個の石が置かれており, 他のマスには石は置かれていない. ここで次の操作を繰り返し行うことを考える.

> 石が 1 個以上あるマスとそこにある石 1 個を選ぶ. そのマスにある石の数を k として, その石を 1 マス以上 k マス以下だけ右に進める.

このとき n の位置に n 個の石が置かれるためには $\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$ 回以上操作する必要があることを示せ. ただし, 実数 r に対して r 以上の最小の整数を $\lceil r \rceil$ で表す.

第 8 問　鋭角三角形 ABC の外心を O とする. 辺 AB, AC 上 (端点を含まない) に点 D, E をそれぞれ直線 BC と DE が平行とならないようにとり, 直線 BC と DE の交点を F とおく. BD の垂直二等分線と CE の垂直二等分線の交点を K とおき, 直線 KO と BC の交点を L とおく. 直線 AO と DE の交点を M とするとき, 4 点 F, M, L, O が同一円周上にあることを示せ.

第 9 問　$P(x)$ は有理数係数多項式で, $P\big(P(x)\big)$, $P\Big(P\big(P(x)\big)\Big)$ は整数係数多項式であるとする. このとき $P(x)$ も整数係数であることを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) 第4日

第 29 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2019 年 3 月 25 日 (月)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

©2019 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 10 問　$AB = AC$ なる三角形 ABC があり, BC の中点を M とする. 点 P を PA と BC が平行であり, $PB < PC$ をみたすようにとり, 直線 PB, PC 上にそれぞれ点 X, Y を, P, B, X がこの順に並び, かつ P, C, Y がこの順に並ぶようにとる. $\angle PXM = \angle PYM$ が成り立つとき, 4 点 A, P, X, Y が同一円周上にあることを示せ.

第 11 問　n は正の整数とする. $n + 2$ 個のマスが横一列に並んでいる. 両端以外の n 個の各マスにそれぞれ L または R のどちらかの文字が書いてあり, 両端以外のあるマスに 1 つの駒が置いてある. 駒が両端のいずれかのマスに置かれるまで次の操作を行う.

- 駒が置かれているマスに書かれている文字が L のとき, 文字を R に書き換え, そのマスよりも左のマスを選びそこに駒を動かす.
- 駒が置かれているマスに書かれている文字が R のとき, 文字を L に書き換え, そのマスよりも右のマスを選びそこに駒を動かす.

(1) どのような開始状態 (書いた文字と置いた駒の位置) からも操作は有限回しか行えないことを示せ.
(2) 2 人のプレイヤーが操作を交互に行い, 最後に操作を行ったプレイヤーが負けとなるゲームを考える. このとき, 先手の行動によらず後手が勝つことができるような開始状態をすべて求めよ.

第 12 問　x, y を実数とする.

$$x^3 + y, \qquad x^2 + y^2, \qquad x + y^3$$

がいずれも整数であるとき, x, y も整数であることを示せ.

以　上