2020年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2020年3月10日 試験時間4時間5題　各問7点

1. 三角形 ABC が円 Γ に内接している．辺 BC 上に点 D があり，点 A における Γ の接線が，D を通り直線 BA に平行な直線と点 E で交わっている．線分 CE が Γ と，C と異なる点 F で交わるとする．4点 B, D, F, E が同一円周上にあるとき，直線 AC, BF, DE が一点で交わることを示せ．

2. 実数 r に対して次の条件を考えるとき，$r=2$ が条件をみたす最大の実数であることを示せ．

正の整数の列 $a_1, a_2, \ldots$ が任意の正の整数 n に対して不等式

$$a_n \leqq a_{n+2} \leqq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$$

をみたすとき，整数 $M>0$ であって $n \geqq M$ ならば $a_{n+2}=a_n$ となるようなものが存在する．

3. 次の条件をみたす正の整数 k をすべて求めよ．

正の整数 m と正の整数からなる集合 S であって，任意の整数 $n>m$ について，n を S の相異なる要素の和として表す方法がちょうど k 通りであるようなものが存在する．

4. 次の条件をみたす整数係数の多項式 P をすべて求めよ．

すべての整数がちょうど1回ずつ現れるような任意の整数列 $a_1, a_2, \ldots$ に対して，整数 i, j, k であって $0<i<j$ かつ $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = P(k)$ をみたすものが存在する．

5. n は3以上の整数である．整数がいくつか書かれた黒板と2つの箱があるとき，次の操作を考える．

黒板に書かれている2つの数 a, b を選んで 1, $a+b$ に書き換え，1つ目の箱に1個，2つ目の箱に $\gcd(a,b)$ 個の石を加える．

いま，黒板には1が n 個書かれており，どちらの箱にも石は入っていない．この状態から有限回操作を行った後，1つ目の箱に s 個，2つ目の箱に t 個の石が入っていたとする．s, t が正の整数のとき，$\dfrac{t}{s}$ の値としてありうるものをすべて求めよ．

ただし，正の整数 x, y に対し，x と y の最大公約数を $\gcd(x,y)$ で表す．

以上