月曜日, *21. 9 月 2020*

問題 1. 凸四角形 $ABCD$ の内部に点 P があり, 次の等式を満たしている.

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC$$

このとき, 角 ADP の二等分線, 角 PCB の二等分線および線分 AB の垂直二等分線が一点で交わることを示せ.

問題 2. 実数 a, b, c, d は $a \geqq b \geqq c \geqq d > 0$ および $a+b+c+d=1$ を満たしている. このとき

$$(a+2b+3c+4d)\,a^a\,b^b\,c^c\,d^d < 1$$

であることを示せ.

問題 3. $4n$ 個の小石があり, それぞれの重さは $1, 2, 3, \ldots, 4n$ である. 各小石は n 色のうちのいずれか 1 色で塗られており, 各色で塗られている小石はちょうど 4 個ずつある. 小石をうまく 2 つの山に分けることによって, 次の 2 つの条件をともに満たすことができることを示せ.

- 各山に含まれる小石の重さの合計は等しい.
- 各色で塗られている小石は, 各山にちょうど 2 個ずつある.

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

火曜日, *22. 9* 月 *2020*

問題 4. $n>1$ を整数とする. 山の斜面に n^2 個の駅があり, どの 2 つの駅も標高が異なる. ケーブルカー会社 A と B は, それぞれ k 個のケーブルカーを運行しており, 各ケーブルカーはある駅からより標高の高い駅へと一方向に運行している (途中に停車する駅はない). 会社 A の k 個のケーブルカーについて, k 個の出発駅はすべて異なり, k 個の終着駅もすべて異なる. また, 会社 A の任意の 2 つのケーブルカーについて, 出発駅の標高が高い方のケーブルカーは, 終着駅の標高ももう一方のケーブルカーより高い. 会社 B についても同様である. 2 つの駅が会社 A または会社 B によって結ばれているとは, その会社のケーブルカーのみを 1 つ以上用いて標高の低い方の駅から高い方の駅へ移動できることをいう (それ以外の手段で駅を移動してはならない).

このとき, どちらの会社によっても結ばれている 2 つの駅が必ず存在するような最小の正の整数 k を求めよ.

問題 5. $n>1$ 枚のカードがある. 各カードには 1 つの正の整数が書かれており, どの 2 つのカードについても, それらのカードに書かれた数の相加平均は, いくつかの (1 枚でもよい) 相異なるカードに書かれた数の相乗平均にもなっている.

このとき, すべてのカードに書かれた数が必ず等しくなるような n をすべて求めよ.

問題 6. 次の条件を満たすような正の定数 c が存在することを示せ.

> $n>1$ を整数とし, $\mathcal{S}$ を平面上の n 個の点からなる集合であって, $\mathcal{S}$ に含まれるどの 2 つの点の距離も 1 以上であるようなものとする. このとき, $\mathcal{S}$ を分離するようなある直線 ℓ が存在し, $\mathcal{S}$ に含まれるどの点についても ℓ への距離が $cn^{-1/3}$ 以上となる.

ただし, 直線 ℓ が点集合 $\mathcal{S}$ を分離するとは, $\mathcal{S}$ に含まれるある 2 点を結ぶ線分が ℓ と交わることを表す.

注. $cn^{-1/3}$ を $cn^{-\alpha}$ に置き換えたうえでこの問題を解いた場合, その $\alpha>1/3$ の値に応じて得点を与える.

Language: Japanese

時間*: 4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.