*2021*年*4*月*11*日*(*日曜日*)*

問題 1. 2021は素晴らしい数である. 正の整数mに対して集合$\{m, 2m+1, 3m\}$のある要素が素晴らしいならばそのすべての要素も素晴らしい. このとき2021^{2021}は素晴らしいか.

問題 2. 関数$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$であって

$$f(xf(x)+y) = f(y) + x^2$$

が任意の有理数x, yに対して成立するものをすべて求めよ.
ただし$\mathbb{Q}$で有理数全体の集合を表す.

問題 3. 角Aが鈍角であるような三角形ABCがある. B, Cを通るABCの垂線と, Aの外角の二等分線の交点をそれぞれE, Fとおく. 点M, Nをそれぞれ線分EC, FB上にあり, $\angle EMA = \angle BCA$, $\angle ANF = \angle ABC$をみたすような点とする. このとき4点E, F, N, Mが同一円周上にあることを示せ.

時間: 4時間30分
各問7点

EGMO 2021 GEORGIA KUTAISI

Language: **Japanese**

Day: **2**

2021年4月12日(月曜日)

問題 4. 三角形ABCの内心をIとし, Dを辺BC上の点とする. Dを通りBIに垂直な直線とCIの交点をEとし, Dを通りCIに垂直な直線とBIの交点をFとする. 直線EFについてAと対称な点は直線BC上にあることを示せ.

問題 5. 平面上に点Oがある. Pを平面上の2021個の点からなる集合であって, 以下をみたすものとする.

(i) Pに含まれるどの3点も同一直線上にない.

(ii) Pに含まれるどの2点もOを通る直線上にない.

Pに含まれる点を頂点とする三角形が**太っている**とは, Oがその三角形の内部(周上を含まない)にあることをいう. 太っている三角形の個数としてありうる最大の値を求めよ.

問題 6. 非負整数aであって, 等式

$$\left\lfloor\frac{m}{1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{3}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{m}{m}\right\rfloor=n^2+a$$

をみたすような正の整数の組(m,n)が 1000000個より多く存在するようなものはあるか.

ただし, 実数xに対してxを超えない最大の整数を$\lfloor x\rfloor$で表す. たとえば$\lfloor\sqrt{2}\rfloor=1$, $\lfloor\pi\rfloor=\lfloor 22/7\rfloor=3$, $\lfloor 42\rfloor=42$, $\lfloor 0\rfloor=0$である.