月曜日, *19. 7* 月 *2021*

問題 1. $n \geqslant 100$ を整数とする．康夫君は $n, n+1, \ldots, 2n$ をそれぞれ相異なるカードに書き込む．その後，これらの $n+1$ 枚のカードをシャッフルし，2 つの山に分ける．このとき，少なくとも一方の山には，書き込まれた数の和が平方数となるような 2 枚のカードが含まれていることを示せ．

問題 2. 任意の実数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して，不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

が成り立つことを示せ．

問題 3. D は $AB > AC$ なる鋭角三角形 ABC の内部の点であり，$\angle DAB = \angle CAD$ をみたしている．線分 AC 上の点 E が $\angle ADE = \angle BCD$ をみたし，線分 AB 上の点 F が $\angle FDA = \angle DBC$ をみたし，直線 AC 上の点 X が $CX = BX$ をみたしている．O_1, O_2 をそれぞれ三角形 ADC, EXD の外心とする．このとき，直線 BC, EF, O_1O_2 は一点で交わることを示せ．

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.

火曜日, *20. 7 月 2021*

問題 **4.** Γ を I を中心とする円とし, 凸四角形 $ABCD$ の各辺 AB, BC, CD, DA が Γ に接している. Ω を三角形 AIC の外接円とする. BA の A 側への延長線が Ω と X で交わっており, BC の C 側への延長線が Ω と Z で交わっている. また, AD, CD の D 側への延長線が, それぞれ Ω と Y, T で交わっている. このとき,

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$$

が成り立つことを示せ.

問題 **5.** 2 匹のリス, トモとナオは冬を越すために 2021 個のクルミを集めた. トモはクルミに順に 1 から 2021 までの番号をつけ, 彼らのお気に入りの木の周りに, 環状に 2021 個の穴を掘った. 翌朝, トモはナオが番号を気にせずに各穴に 1 つずつクルミを入れたことに気づいた. 仕方がないので, トモは次の操作を 2021 回行ってクルミを並べ替えることにした. k 回目の操作ではクルミ k と隣り合っている 2 つのクルミの位置を入れ替える. このとき, ある k が存在して, k 回目の操作でトモは $a < k < b$ をみたすクルミ a , b を入れ替えることを示せ.

問題 **6.** $m \geqslant 2$ を整数, A を (必ずしも正とは限らない) 整数からなる有限集合とし, $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ を A の部分集合とする. 各 $k = 1, 2, \ldots, m$ について, B_k の要素の総和が m^k であるとする. このとき, A は少なくとも $m/2$ 個の要素を含んでいることを示せ.

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.