2021 年日本数学オリンピック予選

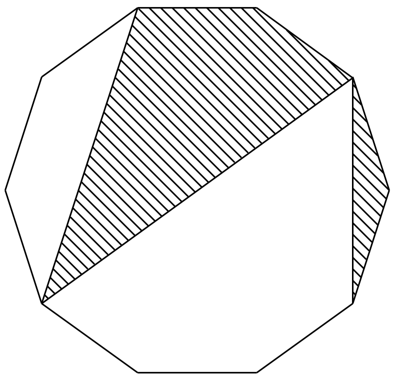
(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

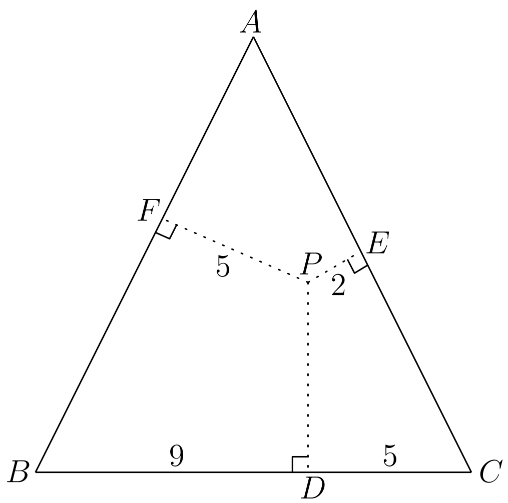
2021 年 1 月 11 日 試験時間 3 時間 12 題 (答のみを記入する)

1. 互いに素な正の整数 m, n が $m+n=90$ をみたすとき, 積 mn としてありうる最大の値を求めよ.

2. 下図のような正十角形がある. 全体の面積が 1 のとき, 斜線部の面積を求めよ.



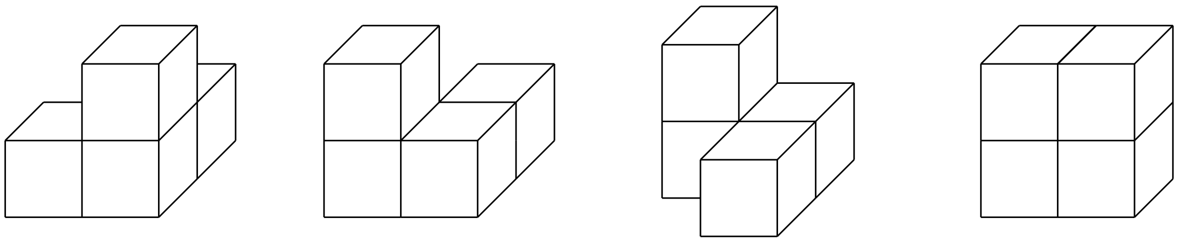
3. $AB=AC$ なる二等辺三角形 ABC の内部に点 P をとり, P から辺 BC, CA, AB におろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. $BD=9$, $CD=5$, $PE=2$, $PF=5$ のとき, 辺 AB の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



4. 黒板に 3 つの相異なる正の整数が書かれている．黒板に実数 a, b, c が書かれているとき，それぞれを $\dfrac{b+c}{2}$, $\dfrac{c+a}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}$ に同時に書き換えるという操作を考える．この操作を 2021 回行ったところ，最後に黒板に書かれた 3 つの数はすべて正の整数だった．このとき，最初に書かれていた 3 つの正の整数の和としてありうる最小の値を求めよ．

5. 下図のように，一辺の長さが 1 の立方体 4 個からなるブロックが 4 種類ある．このようなブロック 4 個を $2 \times 2 \times 4$ の直方体の箱にはみ出さないように入れる方法は何通りあるか．

　ただし，同じ種類のブロックを複数用いてもよく，ブロックは回転させて入れてもよい．また，箱を回転させて一致する入れ方は異なるものとして数える．



6. 正の整数 n に対して，正の整数 m であって m と n が互いに素であり，$m+1$ と $n+1$ も互いに素となるようなもののうち最小のものを $f(n)$ で表す．このとき，$f(1), f(2), \ldots, f\left(10^{10}\right)$ のうちに現れる正の整数は何種類あるか．

7. 三角形 ABC の辺 BC 上に点 P, Q があり，三角形 ACP の垂心と三角形 ABQ の垂心は一致している．$AB=10$, $AC=11$, $BP=5$, $CQ=6$ のとき，辺 BC の長さを求めよ．

　ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

8. 2 以上 20 以下の整数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_{17})$ であって，

$$a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{17}}}}}} \equiv a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{17}}}}}} \equiv 1 \pmod{17}$$

となるものの個数を求めよ．ただし，指数は右上にある 2 数から順に計算する．

9. 2021×2021 のマス目の各マスに 1, 2, 3 の数を 1 つずつ書き込む方法であって，どの 2×2 のマス目についても，その 4 マスに書かれている数の総和が 8 になるようなものが全部で A 通りあるとする．このとき，A を 100 で割った余りを求めよ．

　ただし，回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える．

10. 三角形 ABC の辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり，4 点 D, B, C, E は同一円周上にある．また，四角形 $DBCE$ の内部に点 P があり，$\angle BDP = \angle BPC = \angle PEC$ をみたしている．$AB=9$, $AC=11$, $DP=1$, $EP=3$ のとき，$\dfrac{BP}{CP}$ の値を求めよ．

　ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

11. 1 以上 1000 以下の整数からなる組 (x, y, z, w) すべてについて, $xy + zw$, $xz + yw$, $xw + yz$ の最大値を足し合わせた値を M とする. 同様に, 1 以上 1000 以下の整数からなる組 (x, y, z, w) すべてについて, $xy + zw$, $xz + yw$, $xw + yz$ の最小値を足し合わせた値を m とする. このとき, $M - m$ の正の約数の個数を求めよ.

12. 7×7 のマス目があり, 上から 1 行目, 左から 4 列目のマスに 1 枚のコインが置かれている. マス Y がマス X の**左下のマス**であるとは, ある正の整数 k について, Y が X の k マス左, k マス下にあることをいう. 同様に, マス Y がマス X の**右下のマス**であるとは, ある正の整数 k について, Y が X の k マス右, k マス下にあることをいう. 1 番下の行以外のマス X について, X にコインが置かれているとき次の 4 つの操作のうちいずれかを行うことができる：

(a) X からコインを取り除き, X の 1 つ下のマスにコインを 1 枚置く.

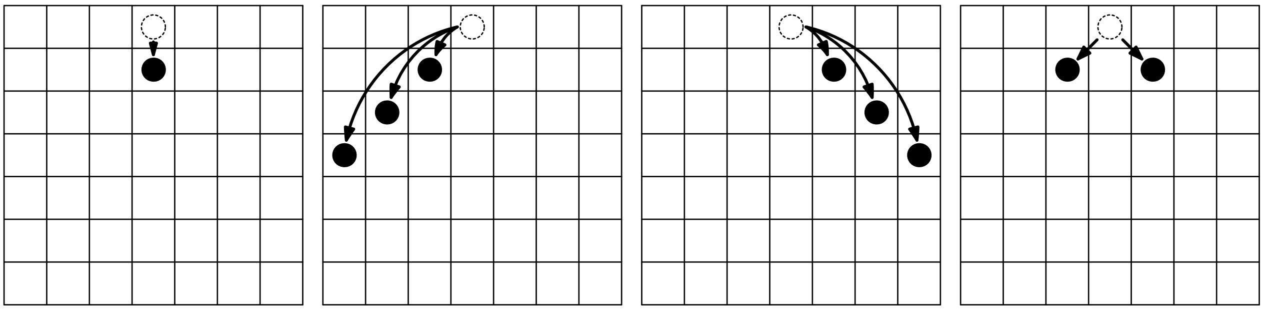
(b) X からコインを取り除き, X の左下のマスそれぞれにコインを 1 枚ずつ置く.

(c) X からコインを取り除き, X の右下のマスそれぞれにコインを 1 枚ずつ置く.

(d) X からコインを取り除き, X の 1 マス左, 1 マス下にあるマスと X の 1 マス右, 1 マス下にあるマスにコインを 1 枚ずつ置く. ただし, そのようなマスが 1 つしかない場合はそのマスのみにコインを 1 枚置く.

ただし, コインを置こうとする場所にすでにコインがある場合, その場所にはコインを置かない.

操作を何回か行ったとき, マス目に置かれているコインの枚数としてありうる最大の値を求めよ.



(a) (b) (c) (d)

以上

第31回日本数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
2021	$\frac{2}{5}$	$4\sqrt{7}$

4	5	6
$3 \cdot 2^{2021} + 3$	379通り	11種類

7	8	9
$\sqrt{231}$	$2042 \cdot 19^{14}$個	3

10	11	12
$\frac{\sqrt{33}}{11}$	20412個	19

受験番号					
会場内通し番号					

合計点