試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 31 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2021 年 3 月 21 日 (日)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 1 問　正 100 角形の頂点のうち 41 個が黒に, 残りの 59 個が白に塗られている. これらの 100 個の点のうち 4 つを頂点とする 24 個の凸四角形 $Q_1, \ldots, Q_{24}$ であって, 以下をみたすものが存在することを示せ.

- $Q_1, \ldots, Q_{24}$ のうちどの 2 つも内部または周上に共通の点をもたない.
- 1 以上 24 以下の整数 i に対して, Q_i の 4 つの頂点のうち 3 つは同じ色で, 残りの 1 つは違う色で塗られている.

第 2 問　a, b, c, d を $(a+c)(b+d) = ac+bd$ をみたす正の実数とする. このとき, $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}$ としてありうる最小の値を求めよ.

第 3 問　n を 3 以上の整数とする. 集合 S は n 個の正の整数からなり, S の互いに異なる 2 つの要素の和が S に含まれることはない. このとき $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ をみたす $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であって, 任意の 2 以上 $n-1$ 以下の整数 i について $a_{i-1}+a_{i+1}$ が a_i で割りきれないようなものが存在することを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　第2日

第 31 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2021 年 3 月 22 日 (月)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 4 問　$AB = AC$ なる二等辺三角形 ABC があり, 辺 BC 上の点 D は $BD < CD$ をみたす. D から辺 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ P, Q とする. 線分 PQ の垂直二等分線が線分 AP と点 E で交わっており, 三角形 ABC の外接円と三角形 APQ の外接円が A と異なる点 F で交わっているとする. Q, E, F が同一直線上にあるとき $\angle BAC = 90^\circ$ が成り立つことを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 5 問　次の条件をみたす 4 以上の整数 n をすべて求めよ.

> 格子点 (座標がともに整数であるような点) を頂点とするような座標平面上の凸 n 角形 P を任意にとる. P と 2 つの辺を共有するような三角形は全部で n 個ある. それらの面積を順に $S_1, S_2, \ldots, S_n$ とし, さらに P の面積を S とする. このとき整数 $2S_1, 2S_2, \ldots, 2S_n$ の最大公約数は整数 $2S$ を割りきる.

第 6 問　n, m を正の整数とする. n 行 m 列のマス目があり, 各マスに実数が 1 つずつ書き込まれている. 行 r 列 c のマスに書き込まれている数を $a(r, c)$ で表す. 行の集合と列の集合の組 (R, C) が**鞍**(くら)であるとは次をともにみたすことをいう.

(i) 各行 r' に対して $r \in R$ であって任意の $c \in C$ に対して $a(r, c) \geqq a(r', c)$ をみたすようなものが存在する.

(ii) 各列 c' に対して $c \in C$ であって任意の $r \in R$ に対して $a(r, c) \leqq a(r, c')$ をみたすようなものが存在する.

さらに, 鞍 (R, C) に対して, 他の鞍 (R', C') であって $R' \subset R$ かつ $C' \subset C$ となるものが自身以外に存在しないとき, その鞍は**極小**であるという. このとき (R, C) と (R', C') を 2 つの極小な鞍とするとき, R の要素数と R' の要素数が等しいことを示せ.

以　上

第 31 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2021 年 3 月 23 日 (火)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 7 問　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f\bigl(x^2+xy^2+y^2\bigr)=2x^2f(y)+2xf\bigl(f(y)\bigr)+f\bigl(-x^2-xy^2\bigr)+f\bigl(y^2\bigr)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

第 8 問　n を 2 以上の整数とする. n ヶ国からそれぞれ n 人ずつが集まり, 合計 n^2 人が内側を向いて円卓を囲んでいる. 同じ国に属するどの異なる 2 人についてもその 1 つ左にいる人の属する国が異なるとする. このとき, 両隣の 2 人が同じ国に属するような人は最大で何人いるか.

第 9 問　$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC がある. 三角形 ABC の内心を I とし, 角 A 内の傍心を I_A とする. 三角形 ABC の内接円と辺 BC の接点を D とし, 直線 AD と直線 BI_A, CI_A との交点をそれぞれ E, F とする. このとき, 三角形 AID の外接円と三角形 I_AEF の外接円が互いに接することを示せ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする. また, 三角形 ABC の角 A 内の傍心とは, 線分 BC, 半直線 AB, 半直線 AC に接する円のうち, 内接円でないものの中心をさす.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第4日**

第 31 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2021 年 3 月 24 日 (水)

試験時間 : 4 時間 30 分
問 題 数 : 3 問
配　　点 : 各問 7 点

第 10 問　各素数 p に対し, 島 $1, 2, \ldots, p$ からなる p 王国がある. p 王国の 2 つの異なる島 n, m は, $(n^2 - m + 1)(m^2 - n + 1)$ が p で割りきれるとき, またそのときに限って橋でつながれている. p 王国に, 橋を何回か渡ることにより行き来することができない 2 つの異なる島が存在するような素数 p が無数に存在することを示せ.

第 11 問　鋭角三角形 ABC の外接円を Γ とし, 内心を I とする. B を通る円 ω_B と C を通る円 ω_C が I で互いに接している. ω_B が Γ の劣弧 AB, 線分 AB とそれぞれ点 P, M で交わっており, ω_C が Γ の劣弧 AC, 線分 AC とそれぞれ点 Q, N で交わっている. 半直線 PM, QN が点 X で交わっており, ω_B の B での接線と ω_C の C での接線が点 Y で交わっている. このとき, A, X, Y が同一直線上にあることを示せ.

第 12 問　整数に対して定義され整数値をとる関数 f であって, 任意の整数 a, b に対して

$$f^{a^2+b^2}(a+b) = af(a) + bf(b)$$

となるものをすべて求めよ.

ただし, $f^0(n) = n$ とし, 正の整数 k に対して $f^k(n) = f\bigl(f^{k-1}(n)\bigr)$ とする.

以　上