

2022年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問題¹

2022年3月15日 試験時間4時間5題 各問7点

1. 正の整数の組 (a, b) であって, a^3 が b^2 の倍数であり, かつ $b-1$ が $a-1$ の倍数であるようなものをすべて求めよ. ただし, 整数 n が整数 m の倍数であるとは, $n = km$ が成り立つような整数 k が存在することをいう.
2. $\angle B = 90^\circ$ なる直角三角形 ABC がある. 点 D を線分 BC の B 側への延長線上にとり, 線分 AD の中点を E とする. 三角形 ACD の外接円と三角形 BDE の外接円が D でない点 F で交わっているとき, 直線 EF は D の位置によらずある定点を通ることを示せ.
3. 202未満の正の整数 k であって,

$$\left\{ \frac{n}{202} \right\} + \left\{ \frac{2n}{202} \right\} + \cdots + \left\{ \frac{kn}{202} \right\} = \frac{k}{2}$$

をみたす正の整数 n が存在するものをすべて求めよ.

ただし, 実数 x に対して $0 \leq r < 1$ なる実数 r であって $x-r$ が整数となるものを $\{x\}$ で表す.

4. n, k を正の整数とする. 1番から n 番までの番号が振られた計 n 個のボールと, k 個の箱がある. はじめすべてのボールは同じ箱に入っている. 康夫君は次の操作を何回でも行うことができる.

ボールが入っている箱を1つ選び, その箱に入っているボールのうち振られている番号が最小のものを取り出す. そのボールの番号を i としたとき, 取り出したボールを空の箱または $i+1$ 番のボールが入っている箱に入れる.

康夫君の目標は, n 番のボールのみが入っている箱を作ることである. 何回かの操作の後で康夫君が目標を達成できるような組 (n, k) をすべて求めよ.

5. 実数 a, b, c, d が $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ をみたすとき, $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ のとりうる最小の値を求め, その最小の値を実現する組 (a, b, c, d) をすべて求めよ.

以上

¹Copyright ©2022 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.
著作権は数学オリンピック財団に帰属します.