2022年4月8日(金曜日)

問題 1. $BC < AB$, $BC < CA$ なる鋭角三角形 ABC がある. P, Q はそれぞれ線分 AB, AC 上の点であり, $P \neq B$, $Q \neq C$, $BQ = BC = CP$ をみたしている. T を三角形 APQ の外心, H を三角形 ABC の垂心とし, S を直線 BQ と CP の交点とする. このとき3点 T, H, S は同一直線上にあることを示せ.

問題 2. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 a, b に対して以下の2つの条件をともにみたすものをすべて求めよ.

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$

(2) $f(a)$, $f(b)$, $f(a+b)$ のうち少なくとも2つは同じ数となる.

問題 3. 正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ が**良い**とは, 以下の2つの条件をともにみたすことをいう.

(1) a_1 が平方数

(2) 2以上の任意の整数 n について, a_n は

$$na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n$$

が平方数となる最小の正の整数である.

任意の良い数列 $a_1, a_2, \ldots$ についてある正の整数 k が存在し, k 以上の任意の整数 n について $a_n = a_k$ が成り立つことを示せ.

時間: 4時間30分
各問7点

このコンテストを全員にとって公平で楽しいものにするため, 4月10日(日曜日)の日本標準時7時(協定世界時4月9日22時)まで問題についてインターネット・SNSで言及してはならない.

2022 年 *4* 月 *9* 日 *(*土曜日*)*

問題 4. n を 2 以上の正の整数とする．以下の 2 つの条件をともにみたす $N+1$ 個の実数 $a_0, a_1, \ldots, a_N$ が存在するような正の整数 N のうち，最大のものを求めよ．

(1) $a_0 + a_1 = -\dfrac{1}{n}$

(2) $1 \leqq k \leqq N-1$ なるすべての整数 k に対して $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ となる．

問題 5. 正の整数 n, k に対して，$n \times 2k$ のマス目を nk 個の 2×1 のドミノで敷き詰める方法の個数を $f(n, 2k)$ で表す．（たとえば，$f(2, 2) = 2$, $f(3, 2) = 3$ である．）正の整数 n であって，任意の正の整数 k に対して $f(n, 2k)$ が奇数となるようなものをすべて求めよ．

問題 6. 四角形 $ABCD$ を点 O を中心とする円に内接する四角形とする．角 A と角 B の内角の二等分線が点 X で交わっている．さらに，角 B と角 C の内角の二等分線が点 Y で，角 C と角 D の内角の二等分線が点 Z で，角 D と角 A の内角の二等分線が点 W で交わっている．また，AC と BD は点 P で交わっている．ただし，X, Y, Z, W, O, P は相異なる点とする．

このとき，O, X, Y, Z, W が同一円周上にあることと，P, X, Y, Z, W が同一円周上にあることが同値であることを示せ．

このコンテストを全員にとって公平で楽しいものにするため，4 月 10 日 (日曜日) の日本標準時 7 時 (協定世界時 4 月 9 日 22 時) まで問題についてインターネット・SNS で言及してはならない．