

月曜日, 11. 7月 2022

問題 1. オスロ銀行ではアルミ製の硬貨 (A で表す) とブロンズ製の硬貨 (B で表す) の 2 種類の硬貨を発行している. 慶子さんは n 枚のアルミ製の硬貨と n 枚のブロンズ製の硬貨を持っており, これらの $2n$ 枚の硬貨は 1 列に並べられている. 1 種類の硬貨からなる連続する部分列を「鎖」とよぶことにする. ある $2n$ 以下の正の整数 k に対して, 慶子さんは以下の操作を繰り返し行う.

左から k 枚目のコインを含む最も長い鎖をとり, その鎖に含まれるコインをすべて列の一番左に移す.

たとえば $n = 4, k = 4$ のとき, 最初のコインの並べ方が $AABBBABA$ であるとする, 操作の過程は次のようになる.

$$AABBBABA \rightarrow BBBAAABA \rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots$$

$1 \leq k \leq 2n$ なる組 (n, k) であって, どのような最初のコインの並べ方についても, 操作を何回か行った後に, 列の左から n 枚のコインの種類がすべて等しくなるようなものをすべて求めよ.

問題 2. \mathbb{R}^+ を正の実数全体からなる集合とする. 関数 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ であって, 任意の $x \in \mathbb{R}^+$ に対して, $xf(y) + yf(x) \leq 2$ なる $y \in \mathbb{R}^+$ がちょうど 1 つ存在するようなものをすべて求めよ.

問題 3. k を正の整数とし, S を奇素数からなる有限集合とする. このとき, 次の条件をみたすように S の要素を 1 つずつ円周上に並べる方法は高々 1 通りしかないことを示せ. ただし, 回転や裏返しで一致する並べ方は同じものとみなす.

隣接するどの 2 つの要素の積も, ある正の整数 x を用いて $x^2 + x + k$ と表される.

火曜日, 12. 7月 2022

問題 4. $BC = DE$ なる凸五角形 $ABCDE$ の内部に点 T があり, $TB = TD$, $TC = TE$, $\angle ABT = \angle TEA$ をみたしている. 直線 AB は直線 CD , CT とそれぞれ点 P , Q で交わっており, P, B, A, Q はこの順に並んでいる. また, 直線 AE は直線 CD , DT とそれぞれ点 R , S で交わっており, R, E, A, S はこの順に並んでいる. このとき, P, S, Q, R は同一円周上にあることを示せ.

問題 5. p が素数であるような正の整数の組 (a, b, p) であって, $a^p = b! + p$ をみたすものをすべて求めよ.

問題 6. n を正の整数とする. 「北欧風の地形」とは, 各マスに整数が 1 つずつ書き込まれているような $n \times n$ のマス目であって, 1 以上 n^2 以下の整数が 1 つずつ書き込まれているようなものを指す. 2 つの相異なるマスが隣接するとは, それらのマスがある辺を共有することをいう. そして, あるマスが「谷」であるとは, 隣接するどのマスに書き込まれている数も, そのマスに書き込まれている数より大きいことをいう. さらに, 次の 3 つの条件をみたす 1 つ以上のマスからなるマスの列を「登山道」とよぶ.

- (i) 列の最初のマスは谷である.
- (ii) 列において連続する 2 つのマスは隣接している.
- (iii) 列の各マスに書き込まれている数は狭義単調増加である.

各 n に対して, 北欧風の地形における登山道の個数としてありうる最小の値を求めよ.