

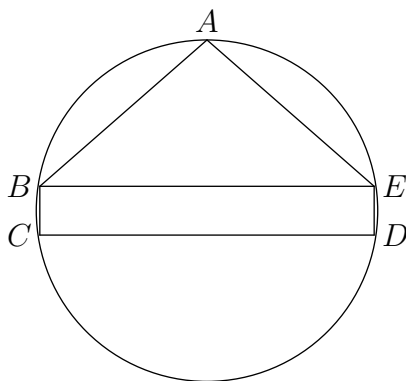
2022年日本ジュニア数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問題¹

2022年1月10日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

- 2×2 のマス目の各マスに A, B, C の文字のうちいずれか1文字を書き込む。辺を共有して隣りあうどの2マスについても異なる文字を書き込む方法は何通りあるか。
ただし、マス目に1回も書き込まれない文字があってもよく、回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える。
- $p \leq q$ なる素数の組 (p, q) であって、 $15(p-1)(q-1)$ が pq の倍数となるようなものすべてについて、 pq を足し合わせた^{あたい}値を求めよ。
- 円 Γ に内接する五角形 $ABCDE$ があり、四角形 $BCDE$ は $BC = DE = 1$ をみたす長方形である。 $AB = EA = 6$ のとき、円 Γ の直径を求めよ。
ただし、 XY で線分 XY の長さを表すものとする。

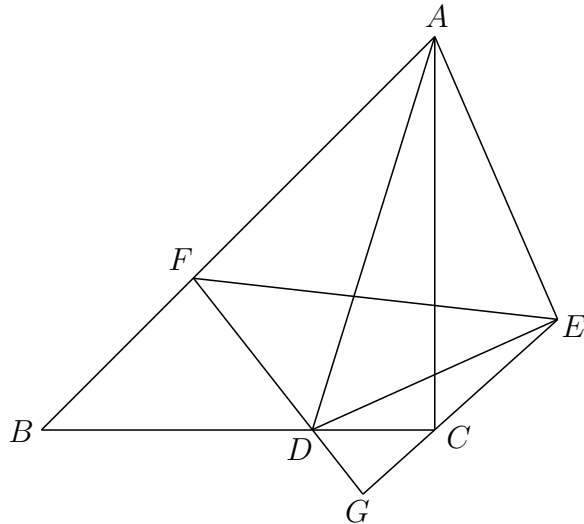


- $AB = 5, BC = 7, CA = 6$ なる三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上 (端点を除く) にそれぞれ点 D, E, F がある。四角形 $ABDE, BCEF$ はそれぞれ円に内接し、三角形 BDF の外接円は直線 EF に接している。このとき、線分 AE の長さを求めよ。
ただし、 XY で線分 XY の長さを表すものとする。
- 45×45 のマス目があり、このうち 2022 個のマスを選んで黒く塗る。どのような塗り方をしても、すべてのマスが黒く塗られている $n \times n$ のマス目が存在するような正の整数 n としてありうる最大の値を求めよ。

¹Copyright ©2022 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.
著作権は数学オリンピック財団に帰属します。

6. それぞれ角 ACB , 角 AED , 角 EGF が直角であるような3つの直角二等辺三角形 ABC , ADE , EFG が下図のように重なっている. 五角形 $ABDGE$ の面積が23であり, $AB = 8$, $FD > DG$ のとき, 線分 FD の長さを求めよ.

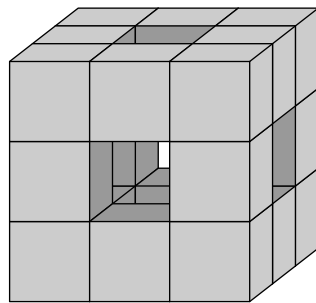
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



7. $a + b + c + d + e = 2022$ をみたすような非負整数の組 (a, b, c, d, e) であって, いずれの桁数も3でないものはいくつあるか. ただし, 0の桁数は1とする.

8. $1 \times 1 \times 1$ のブロック20個からなる下図のような立体があり, それぞれのブロックに1以上8以下の整数を1つずつ割り当てる. この立体の外側の6面のうちどの面についても, その面に存在する8つのブロックに割り当てられた整数がすべて異なるような割り当て方は何通りあるか. ただし, 回転によって一致する割り当て方も異なるものとして数える.

なお, 下図の立体は $3 \times 3 \times 3$ の立方体から, 中心のブロックおよびこれと面を共有するブロックすべてを取り除いたものである.



9. 次の条件をみたす2022以下の正の整数 n はいくつあるか.

n で割りきれぬ正の整数であって, ちょうど1つの位が0であり, その他の位はすべて2であるようなものが存在する.

10. a, b, c, d を $0 < a < b < 103, 0 < c < d < 103$ をみたす整数とする. AさんとBさんが次のようなゲームを行う. 円周上に103個のマスが並んでおり, そのうち1つのマスをSとし, Sから反時計回りに1つ進んだ先のマスをGとする. はじめ1つの駒がSに置かれている. Aさんから始めて次の操作を交互に行う.

- Aさんの操作: 駒を時計回りに a マスまたは b マス進んだ先のマスへ動かす.
- Bさんの操作: 駒を時計回りに c マスまたは d マス進んだ先のマスへ動かす.

Bさんの目標は, 自分の操作の直後にGに駒が置かれている状態にすることである. Aさんの操作の仕方にかかわらず, Bさんが有限回の操作で目標を達成できるような整数の組 (a, b, c, d) はいくつあるか.

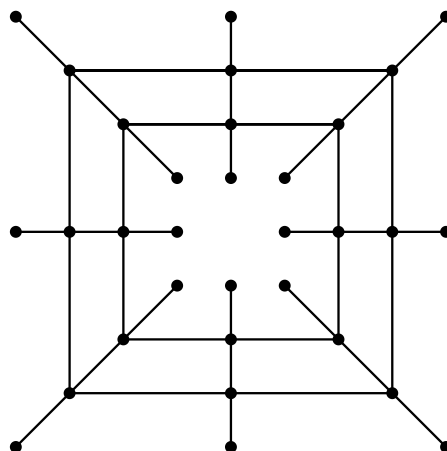
11. $AB = AC$ なる二等辺三角形 ABC の内部に点 P があり, $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ をみたしている. 三角形 PAB, PCA の面積がそれぞれ5, 4であるとき, 線分 BC の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

12. 32個の部屋と40本の廊下からなる下図のような宮殿がある. 下図において, 各部屋は●で表されており, 廊下はそれらを結ぶ実線で表されている. それぞれの部屋に高々1台, 計 n 台のロボットを配置し, それぞれのロボットに, そのロボットが配置された部屋とつながっている廊下を1つ割り当てたところ, 次の条件をみたした.

すべてのロボットを割り当てられた廊下にそって同時に動かし始め, もう一方の端にある部屋に同時に到着させることを考える. この過程でどの2台のロボットもすれ違うことはなく, それぞれのロボットが到着する部屋は相異なる.

このようなことが起こりうる n のうち最大のものを N としたとき, 条件をみたすように N 台のロボットを配置して廊下を割り当てる方法は何通りあるか.

ただし, ロボットどうしは区別しない.



以上

第20回日本ジュニア数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
18通り	31	9

4	5	6
$\frac{75}{37}$	22	$2 + \sqrt{2}$

7	8	9
500149500	80640通り	1700個

10	11	12
515100個	$\sqrt{26}$	12544通り

受験番号					
会場内通し番号					

合計点