2022年日本数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

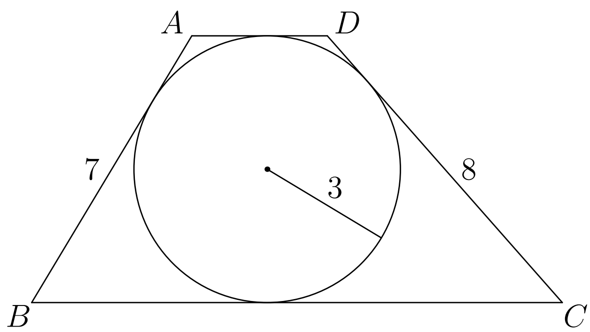
問　　題[1]

2022年1月10日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

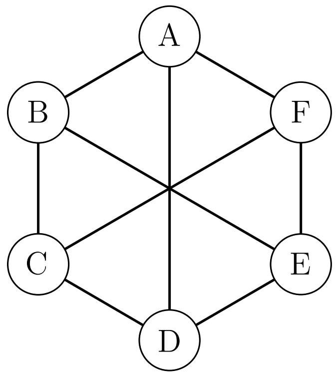
1. 2022より大きい4桁(けた)の3の倍数であって, 千の位, 百の位, 十の位, 一の位に現れる数字がちょうど2種類であるようなもののうち, 最小のものを求めよ.

2. 辺 AD と辺 BC が平行であり, 角 B と角 C が鋭角であるような台形 $ABCD$ に半径3の円が内接している. $AB = 7$, $CD = 8$ のとき台形 $ABCD$ の面積を求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



3. 正六角形の各頂点にマス A, B, C, D, E, F があり, 各マスからは隣りあう頂点にあるマスか, 向かいあう頂点にあるマスのいずれかに移動できる. マス A から始めて, マス A を途中で訪れることなくそれ以外のすべてのマスをちょうど1回ずつ訪れて, マス A に戻ってくるように移動する方法は何通りあるか.

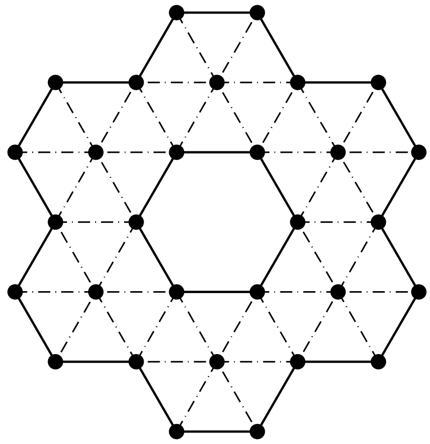


4. 凸四角形 $ABCD$ とその内部の点 P があり, 直線 AP と直線 AD, 直線 BP と直線 CD はそれぞれ直交する. $AB=7$, $AP=3$, $BP=6$, $AD=5$, $CD=10$ のとき, 三角形 ABC の面積を求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

5. 1 以上 2022 以下の整数の組 (m,n) であって, 次の条件をみたすものはいくつあるか.

> 任意の正の整数 N について, ある非負整数 k とある N より大きい整数 d であって, $\dfrac{m-k^2}{d}$ と $\dfrac{n+2k}{d}$ がともに整数となるものが存在する.

6. 一辺の長さが 1 である正三角形のタイルが 36 枚あり, それらを組み合わせて図のような盤面を作る. このとき, ● で示されている 30 個の点を**良い点**とよぶ.



この盤面において, それぞれのタイルを赤または青のいずれか 1 色に塗る方法であって, 以下の条件をみたすものは何通りあるか.

> どの良い点についても, それを頂点にもつタイルのうち, 赤で塗られているものと青で塗られているものの枚数が等しい.

ただし, 盤面を回転したり裏返したりして一致する塗り方は区別して数える.

7. $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=7$ である直角二等辺三角形 ABC がある. 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F があり, $\angle EDF=90^\circ$, $DE=5$, $DF=3$ をみたしているとき, 線分 BD の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

8. $a_1<a_2<\cdots<a_{2022}$ をみたす正の整数の組 $(a_1,a_2,\ldots,a_{2022})$ であって,

$$a_1^2-6^2 \geqq a_2^2-7^2 \geqq \cdots \geqq a_{2022}^2-2027^2$$

が成り立つものはいくつあるか.

9. $1,2,\ldots,1000$ の並べ替え(か)え $(p_1,p_2,\ldots,p_{1000})$ であって, 任意の 1 以上 999 以下の整数 i に対して, p_i が i の倍数であるようなものはいくつあるか.

10. 1 以上 50 以下の整数から相異なる 25 個の整数を選ぶ方法であって, 選ばれたどの相異なる 2 つの整数についても, 一方が他方の約数となることがないようなものは何通りあるか.

11. 正の整数 n に対して, $f(n)$ を

$$f(n)=\begin{cases} n^{100} & (n \text{ の各桁の和が偶数のとき}), \\ -n^{100} & (n \text{ の各桁の和が奇数のとき}) \end{cases}$$

と定める. $S=f(1)+f(2)+\cdots+f(10^{100}-1)$ とするとき, S が 5^m で割りきれるような最大の非負整数 m を求めよ. ただし, S は 0 ではない.

12. $AB=11$, $AC=10$ をみたす鋭角三角形 ABC があり, その垂心を H, 辺 BC の中点を M とする. 三角形 ABC の内部の点 P が三角形 BHC の外接円上にあり, $\angle ABP=\angle CPM$, $PM=3$ をみたしている. このとき, 線分 BC の長さを求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

以上

第32回日本数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
2112	45	12通り

4	5	6
$\frac{245}{6}$	44個	68通り

7	8	9
$\frac{21\sqrt{2}}{8}$	10個	504個

10	11	12
1632通り	5074	$2\sqrt{21}$

受験番号					
会場内通し番号					

合計点