試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　　　**第1日**

第 32 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　　　2022 年 3 月 20 日 (日)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 1 問　n を 3 以上の整数とする. $n+1$ 以上の整数 m が **n-カラフル**であるとは, 円周上に並んでいる m 個のマスそれぞれに 1 以上 n 以下の整数のうちいずれか 1 つを書き込む方法であって, 以下の条件をみたすものが存在することをいう.

> どの連続する $n+1$ 個のマスについても, 任意の 1 以上 n 以下の整数 i について, i が書き込まれているマスが存在する.

n-カラフルでない正の整数は有限個しかないことを示し, そのうち最大のものを求めよ.

第 2 問　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f\big(xf(y)+f(f(y))\big)+yf(f(x))=f\Big(\big(f(f(x))+1\big)f(y)\Big)+xy$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

第 3 問　正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ があり, 任意の正の整数 n, m に対して a_{n+2m} が a_n+a_{n+m} を割りきる. このとき, ある正の整数 N, d が存在して, 任意の N 以上の整数 n に対して $a_n=a_{n+d}$ が成り立つことを示せ.

以　上

第 32 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2022 年 3 月 21 日 (月)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 4 問　n を正の整数とする. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が $1, 2, \ldots, n$ の並べ替えであるとき,

$$\left[\frac{a_1}{1}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{a_n}{n}\right]$$

としてありうる最小の値を求めよ.

ただし, $1, 2, \ldots, n$ の並べ替えとは, 1 以上 n 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ n の数列である. また, 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表す.

第 5 問　$r > 1$ を有理数とし, B, R をある直線上の相異なる 2 点とする. はじめ, B には青いビーズ 1 つが, R には赤いビーズ 1 つが置いてある. これらに太郎君が次の操作を繰り返し行う.

> 整数 k およびいずれかのビーズの置いてある点 X を選ぶ. もう一方のビーズが置いてある点を Y とし, 半直線 YX 上の点 X' を $YX' = r^k YX$ をみたすようにとる. そして, X に置いてあるビーズを X' に移す.

このとき, 太郎君が 2021 回以下の操作で赤いビーズを B に移すことができるような r をすべて求めよ. ただし, PQ で線分 PQ の長さを表すものとする.

第 6 問　線分 MN を直径とする円 Γ があり, その内部 (周上を含まない) に点 A がある. N を中心とし A を通る円と Γ の交点を B, C とする. 線分 BC 上 (端点を除く) に相異なる点 P, Q があり, $\angle BAP = \angle QAC$ をみたしている. 直線 NP, NQ と Γ の交点のうち N でない方をそれぞれ X, Y とする. このとき, 3 直線 AM, PY, QX は 1 点で交わることを示せ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) 第3日

第 32 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2022 年 3 月 22 日 (火)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　$AC=BC$ をみたす平行四辺形 $ABCD$ があり, 点 P を辺 AB の B 側の延長線上にとる. 三角形 ACD の外接円と線分 PD が D でない点 Q で交わっており, 三角形 APQ の外接円と線分 PC が P でない点 R で交わっている. このとき, 3 直線 CD, AQ, BR は 1 点で交わることを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 8 問　m を 3 以上の奇数, n を 3 以上の整数とし, 1 以上 m 以下の整数 i に対し, $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}$ を $1, 2, \ldots, n$ の並べ替えとする. ただし, $1, 2, \ldots, n$ の並べ替えとは, 1 以上 n 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ n の数列である.

いま, 議長と m 人の団長 (団長 1, 団長 2, …, 団長 m) が集まって, 今年の IMO の問題を選ぶ会議をしている. 会議には n 個の候補問題 (問題 1, 問題 2, …, 問題 n) が提出されている. 各団長にはそれぞれの問題への**好感度**が 1 以上 n 以下の整数で定まっており, はじめ団長 i の問題 j への好感度は $a_{i,j}$ である. 議長は次の操作を繰り返し行うことができる.

> 1 以上 m 以下の整数 i と 1 以上 n 以下の整数 j, k であって, 団長 i の問題 j と問題 k への好感度の差が 1 であるものを選び, 団長 i の問題 j と問題 k への好感度を入れ替える.

mn 個の整数 $a_{i,j}$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ にかかわらず, 議長が操作を高々 L 回行うことで次の条件をみたすようにできる最小の非負整数 L を求めよ.

> どの 1 以上 n 以下の相異なる整数 x, y についても, 2 以上の整数 s と $p_1 = x$, $p_s = y$ となるような 1 以上 n 以下の整数の列 $p_1, p_2, \ldots, p_s$ が存在して, すべての 1 以上 $s-1$ 以下の整数 t について, 問題 p_t への好感度より問題 p_{t+1} への好感度が大きい団長が $\dfrac{m+1}{2}$ 人以上いる.

第 9 問　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = yf(x) - f(x+f(y))$$

が成り立ち, かつ $f(-1) = -1$ をみたすようなものをすべて求めよ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第4日**

第 32 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2022 年 3 月 23 日 (水)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 10 問　n を正の整数とし, n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す. 相異なる n の正の約数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{d(n)}$ であって, 次の条件をみたすものが存在する n をすべて求めよ.

任意の $d(n)$ 以下の正の整数 i に対して, $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ が平方数となる.

第 11 問　円 Ω に内接する四角形 $ABCD$ がある. Ω の D における接線が半直線 BA, BC とそれぞれ点 E, F で交わっている. 三角形 ABC の内部 (周上を含まない) に点 T をとったところ, $TE \parallel CD$, $TF \parallel AD$ をみたした. また, 線分 DF 上に D と異なる点 K をとったところ, $TD = TK$ をみたした. このとき, 3 直線 AC, DT, BK は 1 点で交わることを示せ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 12 問　ハンターと見えないうさぎが縦横に無限に広がるマス目を用いてゲームを行う. まず, ハンターは正の整数 k を選び, 各マスに 1 以上 k 以下の整数のうちいずれか 1 つを割り当て, うさぎに伝える. 次に, うさぎは 1 つのマスを選び, そのマスに潜む. その後, うさぎは次の行動を (i)(ii) の順で行うことを繰り返す.

(i) 現在うさぎがいるマスに割り当てられている整数をハンターに伝える.
(ii) 現在いるマスと辺を共有するマスであって, まだ訪れたことのないマスへ移動する. ただし, 移動できるマスが存在しないとき, その時点でゲームは終了となる.

ある時点で, ハンターがそれまでにうさぎから伝えられた整数をもとに, うさぎが最初に潜んだマスを一意に特定できたとき, その時点でゲームは終了となる.
ハンターの k の選び方および整数の割り当て方によらず, うさぎはゲームが終了しないように最初に潜むマスを選び, 行動し続けることは可能か.

以　上