

試験時間：4 時間 30 分  
 問題数：3 問  
 配点：各問 7 点

©2022 著作権は数学オリンピック財団に属する。

**第 1 問**  $n$  を 3 以上の整数とする.  $n + 1$  以上の整数  $m$  が  $n$ -カラフルであるとは, 円周上に並んでいる  $m$  個のマスそれぞれに 1 以上  $n$  以下の整数のうちいずれか 1 つを書き込む方法であって, 以下の条件をみたすものが存在することをいう.

どの連続する  $n + 1$  個のマスについても, 任意の 1 以上  $n$  以下の整数  $i$  について,  $i$  が書き込まれているマスが存在する.

$n$ -カラフルでない正の整数は有限個しかないことを示し, そのうち最大のものを求めよ.

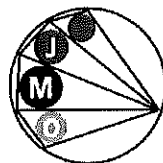
**第 2 問** 実数に対して定義され実数値をとる関数  $f$  であって, 任意の実数  $x, y$  に対して

$$f(xf(y) + f(f(y))) + yf(f(x)) = f((f(f(x)) + 1)f(y)) + xy$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

**第 3 問** 正の整数からなる数列  $a_1, a_2, \dots$  があり, 任意の正の整数  $n, m$  に対して  $a_{n+2m}$  が  $a_n + a_{n+m}$  を割りきる. このとき, ある正の整数  $N, d$  が存在して, 任意の  $N$  以上の整数  $n$  に対して  $a_n = a_{n+d}$  が成り立つことを示せ.

以上



試験時間：4 時間 30 分  
 問題数：3 問  
 配点：各問 7 点

©2022 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 4 問  $n$  を正の整数とする.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が  $1, 2, \dots, n$  の並べ替えであるとき,

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor$$

としてありうる最小の値を求めよ.

ただし,  $1, 2, \dots, n$  の並べ替えとは,  $1$  以上  $n$  以下の整数がちょうど  $1$  回ずつ現れる長さ  $n$  の数列である. また, 実数  $r$  に対して  $r$  を超えない最大の整数を  $\lfloor r \rfloor$  で表す.

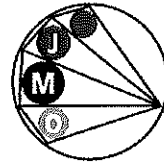
第 5 問  $r > 1$  を有理数とし,  $B, R$  をある直線上の相異なる 2 点とする. はじめ,  $B$  には青いビーズ 1 つが,  $R$  には赤いビーズ 1 つが置いてある. これらに太郎君が次の操作を繰り返す行う.

整数  $k$  およびいずれかのビーズの置いてある点  $X$  を選ぶ. もう一方のビーズが置いてある点を  $Y$  とし, 半直線  $YX$  上の点  $X'$  を  $YX' = r^k YX$  をみたすようにとる. そして,  $X$  に置いてあるビーズを  $X'$  に移す.

このとき, 太郎君が 2021 回以下の操作で赤いビーズを  $B$  に移すことができるような  $r$  をすべて求めよ. ただし,  $PQ$  で線分  $PQ$  の長さを表すものとする.

第 6 問 線分  $MN$  を直径とする円  $\Gamma$  があり, その内部 (周上を含まない) に点  $A$  がある.  $N$  を中心とし  $A$  を通る円と  $\Gamma$  の交点を  $B, C$  とする. 線分  $BC$  上 (端点を除く) に相異なる点  $P, Q$  があり,  $\angle BAP = \angle QAC$  をみたしている. 直線  $NP, NQ$  と  $\Gamma$  の交点のうち  $N$  でない方をそれぞれ  $X, Y$  とする. このとき, 3 直線  $AM, PY, QX$  は 1 点で交わることを示せ.

以上



試験時間：4 時間 30 分  
問題数：3 問  
配点：各問 7 点

©2022 著作権は数学オリンピック財団に属する。

**第 7 問**  $AC = BC$  をみたす平行四辺形  $ABCD$  があり、点  $P$  を辺  $AB$  の  $B$  側の延長線上にとる。三角形  $ACD$  の外接円と線分  $PD$  が  $D$  でない点  $Q$  で交わっており、三角形  $APQ$  の外接円と線分  $PC$  が  $P$  でない点  $R$  で交わっている。このとき、3 直線  $CD, AQ, BR$  は 1 点で交わることを示せ。ただし、 $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする。

**第 8 問**  $m$  を 3 以上の奇数、 $n$  を 3 以上の整数とし、1 以上  $m$  以下の整数  $i$  に対し、 $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$  を  $1, 2, \dots, n$  の並べ替えとする。ただし、 $1, 2, \dots, n$  の並べ替えとは、1 以上  $n$  以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ  $n$  の数列である。

いま、議長と  $m$  人の団長 (団長 1, 団長 2,  $\dots$ , 団長  $m$ ) が集まって、今年の IMO の問題を選ぶ会議をしている。会議には  $n$  個の候補問題 (問題 1, 問題 2,  $\dots$ , 問題  $n$ ) が提出されている。各団長にはそれぞれの問題への好感度が 1 以上  $n$  以下の整数で定まっており、はじめ団長  $i$  の問題  $j$  への好感度は  $a_{i,j}$  である。議長は次の操作を繰り返し行うことができる。

1 以上  $m$  以下の整数  $i$  と 1 以上  $n$  以下の整数  $j, k$  であって、団長  $i$  の問題  $j$  と問題  $k$  への好感度の差が 1 であるものを選び、団長  $i$  の問題  $j$  と問題  $k$  への好感度を入れ替える。

$mn$  個の整数  $a_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ) にかかわらず、議長が操作を高々  $L$  回行うことで次の条件をみたすようにできる最小の非負整数  $L$  を求めよ。

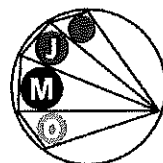
どの 1 以上  $n$  以下の相異なる整数  $x, y$  についても、2 以上の整数  $s$  と  $p_1 = x, p_s = y$  となるような 1 以上  $n$  以下の整数の列  $p_1, p_2, \dots, p_s$  が存在して、すべての 1 以上  $s-1$  以下の整数  $t$  について、問題  $p_t$  への好感度より問題  $p_{t+1}$  への好感度が大きい団長が  $\frac{m+1}{2}$  人以上いる。

**第 9 問** 実数に対して定義され実数値をとる関数  $f$  であって、任意の実数  $x, y$  に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = yf(x) - f(x+f(y))$$

が成り立ち、かつ  $f(-1) = -1$  をみたすようなものをすべて求めよ。

以 上



試験時間：4 時間 30 分  
 問題数：3 問  
 配点：各問 7 点

©2022 著作権は数学オリンピック財団に属する。

第 10 問  $n$  を正の整数とし、 $n$  の正の約数の個数を  $d(n)$  で表す。相異なる  $n$  の正の約数からなる数列  $a_1, a_2, \dots, a_{d(n)}$  であって、次の条件をみたすものが存在する  $n$  をすべて求めよ。

任意の  $d(n)$  以下の正の整数  $i$  に対して、 $a_1 + a_2 + \dots + a_i$  が平方数となる。

第 11 問 円  $\Omega$  に内接する四角形  $ABCD$  がある。  $\Omega$  の  $D$  における接線が半直線  $BA, BC$  とそれぞれ点  $E, F$  で交わっている。 三角形  $ABC$  の内部 (周上を含まない) に点  $T$  をとったところ、 $TE \parallel CD, TF \parallel AD$  をみたした。 また、線分  $DF$  上に  $D$  と異なる点  $K$  をとったところ、 $TD = TK$  をみたした。 このとき、3 直線  $AC, DT, BK$  は 1 点で交わることを示せ。

ただし、 $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする。

第 12 問 ハンターと見えないうさぎが縦横に無限に広がるマス目を用いてゲームを行う。 まず、ハンターは正の整数  $k$  を選び、各マスに 1 以上  $k$  以下の整数のうちいずれか 1 つを割り当て、うさぎに伝える。 次に、うさぎは 1 つのマスを選び、そのマスに潜む。 その後、うさぎは次の行動を (i)(ii) の順で行うことを繰り返す。

- (i) 現在うさぎがいるマスに割り当てられている整数をハンターに伝える。
- (ii) 現在いるマスと辺を共有するマスであって、まだ訪れたことのないマスへ移動する。 ただし、移動できるマスが存在しないとき、その時点でゲームは終了となる。

ある時点で、ハンターがそれまでにうさぎから伝えられた整数をもとに、うさぎが最初に潜んだマスを一意に特定できたとき、その時点でゲームは終了となる。

ハンターの  $k$  の選び方および整数の割り当て方によらず、うさぎはゲームが終了しないように最初に潜むマスを選び、行動し続けることは可能か。

以上