2023年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2023年3月14日 試験時間4時間5題　各問7点

1. n を5以上の整数とする．一辺の長さをそれぞれ $1, 2, \dots, n$ とする正方形の板が1枚ずつある．以下の条件をすべてみたすように，これらの板を xy 平面上に配置できることを示せ．

- どの板についても，各辺は x 軸または y 軸に平行である．
- どの相(あい)異なる2枚の板についても，頂点どうしの1点のみで接触する場合を除いて，重なったり接触したりしない．
- どの板についても，他のちょうど2枚の板と接触する．

2. $\dfrac{\sigma(n)}{p(n)-1} = n$ をみたす2以上の整数 n をすべて求めよ．
ただし，$\sigma(n)$ で n の正の約数の総和を，$p(n)$ で n を割り切る最大の素数を表すものとする．

3. 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 W, X, Y, Z がある．三角形 AWZ, BXW, CYX, DZY それぞれの内心が平行四辺形をなすとき，四角形 $WXYZ$ が平行四辺形であることを示せ．

4. c を正の実数とする．正の実数に対して定義され正の実数値をとる関数 f であって，任意の正の実数 x, y に対して

$$f\big((c+1)x + f(y)\big) = f(x+2y) + 2cx$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

5. n を正の整数とする．平面上に n 本の線分がある．どの 2 本の線分も端点でない点どうしで交わっているが，どの 3 本の線分も 1 点では交わらない．それぞれの線分の各端点に人が 1 人ずつ立っていて，その中の 1 人は岳彦君であり，残りの $2n-1$ 人は岳彦君の友人である．岳彦君は以下のようにして友人にプレゼントを渡したいと考えている．

まず，岳彦君はそれぞれの線分について，その線分の端点のうち一方を選び，印をつける．次に，岳彦君は，自分の立っている端点にプレゼントを 1 つ置く．プレゼントは次のように動く：

- プレゼントがちょうど 1 つの線分上にあるとき，その線分の印の方に向かって進む．
- プレゼントが 2 本の線分の交点に到達したとき，移動する線分を切り替えて，その線分の印の方に向かって進み始める．

プレゼントが線分の端点に到達したとき，その端点にいる友人はそのプレゼントを受け取れるものとする．岳彦君がうまく印をつけることでプレゼントを渡せる友人は $2n-1$ 人中ちょうど n 人であることを示せ．

以上