2023年日本ジュニア数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2023年2月11日 試験時間4時間5題

1. $AB < BC$, $AC < BC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Γ とする. 点 B, C を中心とし A を通る円をそれぞれ Γ_1, Γ_2 とする. Γ_1 と Γ_2, Γ_1 と Γ, Γ_2 と Γ の交点のうち A でない方をそれぞれ D, E, F とするとき, 三角形 ABC と三角形 DEF は相似であることを示せ.

　ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

2. 黒板に2023個の相異なる正の実数が書かれている. この中から相異なる2数 x, y を選んで $\dfrac{xy}{(x+y)^2}$ と表せる数はちょうど k 種類であった. このとき, k としてありうる最小の値を求めよ.

3. n を正の整数とする. まず, A さんが $n \times n$ のマス目の各マスに1以上 n^2 以下の相異なる整数を1つずつ書き込む. 次に, B さんがどの2マスも辺を共有して隣りあわないようないくつかのマスを選び, それらのマスに書かれている整数の総和を**得点**とする. A さんの書き込み方によらず, B さんが得点をつねに M 以上にできるような整数 M としてありうる最大の値を求めよ.

4. 正の有理数の組 (a, b, c) であって,

$$a + \frac{c}{b}, \quad b + \frac{a}{c}, \quad c + \frac{b}{a}$$

がすべて整数になるようなものをすべて求めよ.

5. 三角形 ABC において, その外接円を Γ とし, 辺 AC の中点を M とする. M を通るある直線が直線 BC, AB とそれぞれ点 P, Q で交わっている. ただし, 3点 P, B, C はこの順に並んでおり, P と B は相異なる. 線分 PQ の中点を N とすると, 直線 AN と Γ が A, N と異なる点 R で交わった. このとき, 三角形 PRN の外接円は直線 BC に接することを示せ.

以上