２０２３年
第21回 日本ジュニア数学オリンピック
予 選 問 題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2023 年 1 月 9 日

(公財) 数学オリンピック財団

2023年日本ジュニア数学オリンピック予選

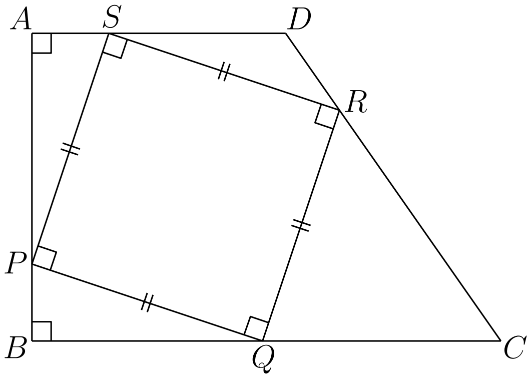
(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2023年1月9日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

1. 正の約数をちょうど6個もち, かつ各桁の和が7であるような正の整数を**今年の数**とよぶ. たとえば2023は今年の数である. 最小の今年の数を求めよ.

2. 辺 AD と辺 BC が平行である台形 $ABCD$ があり, $\angle A = \angle B = 90°$, $AB = 8$, $BC = 11$, $DA = 6$ が成り立っている. 辺 AB, BC, CD, DA 上にそれぞれ点 P, Q, R, S があり, 四角形 $PQRS$ は正方形である. このとき, $\dfrac{CR}{RD}$ の値を求めよ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



3. 横一列に並んだ7つのマスの各マスに A, B, C のいずれか1文字を書き込む方法であって, ともに A が書き込まれた隣りあう2マス, ともに B が書き込まれた隣りあう2マス, ともに C が書き込まれた隣りあう2マスがすべて存在するようなものは何通りあるか.
ただし, 回転や裏返しによって一致する書き込み方も区別して数える.

4. 5つの相異なる正の整数 a, b, c, d, e がある. 次の10個の式

$$a+b, \quad a+c, \quad a+d, \quad a+e, \quad b+c, \quad b+d, \quad b+e, \quad c+d, \quad c+e, \quad d+e$$

のうち, 値が素数となるものの個数としてありうる最大の値を求めよ.

5. $AB = 8$, $AC = 9$ をみたす三角形 ABC がある. 直線 BC と平行な直線が三角形 ABC の外接円と相異なる2点 P, Q で交わっており, 辺 AB, AC とそれぞれ点 D, E で交わっている. ただし, 4点 P, D, E, Q はこの順に並んでいる. $PD = 2$, $EQ = 3$ のとき, 線分 DE の長さを求めよ. なお, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

6. $a < b < c$ をみたす正の整数の組 (a, b, c) であって,

$$a^2 - 20005a > b^2 - 20005b > c^2 - 20005c$$

が成り立つものはいくつあるか.

7. J 国を含(ふく)む 100 か国が参加する大会で, 各国 3 人の計 300 人の選手がテストを受け, 全員が異なる非負整数の得点を獲(かく)得した. J 国の選手は, 300 人のうちそれぞれ 1, 10, 100 番目に大きい得点を獲得した. このとき, 残りの 99 か国のうち次の条件をみたす国の数としてありうる最大の値を求めよ.

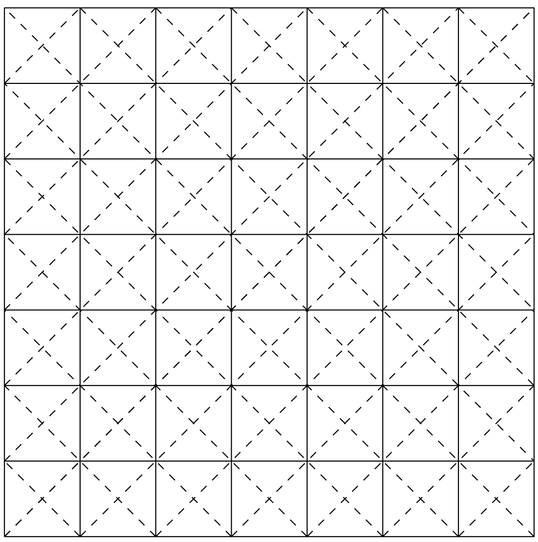
その国の 3 人の選手の得点の和が J 国の 3 人の選手の得点の和より大きい.

8. 円に内接する四角形 $ABCD$ が $AB = 1$, $CD = 3$, $AC : BD = 1 : 2$ をみたしている. このような四角形 $ABCD$ の面積としてありうる最大の値を求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

9. 7×7 のマス目に対し, 隣りあう 2 マスの共有する辺を**良い辺**とよぶ. 図のように各マスを 4 つに分割(かつ)すると, 同じ大きさの直角二等辺三角形 196 個に分割される. この 196 個の直角二等辺三角形を**小三角形**とよぶ. それぞれの小三角形を赤または青のいずれか 1 色で塗(ぬ)る方法であって, 以下の条件をともにみたすものは何通りあるか.

- どのマスについても, そのマスに含まれる 4 つの小三角形のうち赤く塗られているものは 1 つまたは 3 つである.
- どの良い辺についても, それを辺にもつ 2 つの小三角形は同じ色で塗られている.



10. n を 3 以上 2023 以下の整数とする. A さんと B さんが次のようなゲームを行う. はじめに A さんが n と言い, その後 B さんから交互(ご)に次の操作を行う :

直前に相手が言った数を x として, x と互(たが)いに素な x 未満の正の整数を言う.

はじめて n 未満の n の約数が言われたときゲームを終了し, それを言った人の負け, もう一方の勝ちとする. このとき, B さんの行動にかかわらず A さんが必ず勝つことができるような n はいくつあるか.

11. JJMO 中学校の生徒はそれぞれ A 市と B 市のどちらか一方に住んでおり, あわせて 2023 人いる. どの異なる 2 人の生徒も互いに友人であるか互いに友人でないかのいずれか一方である. ただし, どの生徒も自分自身と友人でないものとする. ここで, JJMO 中学校のどの生徒 S についても次が成立した.

S の友人である生徒の人数を d とするとき, そのうち S と同じ市に住んでいる生徒の人数はちょうど $\left[\dfrac{d}{2}\right]$ である.

このとき, 互いに友人であるような JJMO 中学校の生徒 2 人組の数としてありうる最大の値を求めよ. ただし, 2 人の順番を入れ替(か)えただけの組は同じものとみなす.

なお, 実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す. たとえば, $[3.14] = 3$, $[5] = 5$ である.

12. 三角形 ABC の辺 AB, AC 上 (端(たん)点を含まない) にそれぞれ点 D, E があり, 4 点 D, B, C, E は同一円周上にある. 辺 BC の中点を M, 直線 BE と直線 CD の交点を P とする. $DE = 6$, $BC = 10$, $AP = 9$, $PM = 4$ のとき, 線分 AM の長さを求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

以上

第21回日本ジュニア数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
52	$\frac{3}{2}$	54通り

4	5	6
6個	$\frac{17}{5}$	333433340000個

7	8	9
33	$\frac{8}{3}$	2^{63}通り

10	11	12
173個	2043736個	$\sqrt{137}$

受験番号					
会場内通し番号					

合計点