2023年日本数学オリンピック本選

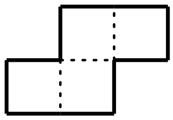
(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2023年2月11日 試験時間4時間5題

1. 5×5 のマス目に, 図のような4マスからなるタイル何枚かをマス目にそって置く. ここで, タイルは**重ねて置いてもよい**が, マス目からはみ出してはならない. どのマスについても, そのマスを覆うタイルが0枚以上2枚以下であるとき, 少なくとも1枚のタイルで覆われているマスの個数としてありうる最大の値を求めよ.

ただし, タイルを回転したり裏返したりしてもよい.



2. 鋭角三角形 ABC があり, 辺 BC, CA, AB の中点をそれぞれ D, E, F とし, D から辺 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ X, Y とする. F を通り直線 XY に平行な直線と直線 DY が E と異なる点 P で交わっている. このとき, 直線 AD と直線 EP は垂直に交わることを示せ.

3. c を非負整数とする. 正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ であって, 任意の正の整数 n に対して次の条件をみたすものをすべて求めよ.

$a_i \leqq a_{n+1} + c$ をみたす正の整数 i がちょうど a_n 個存在する.

4. 正の整数 n であって, $\dfrac{\phi(n)^{d(n)}+1}{n}$ が整数であり, $\dfrac{n^{\phi(n)}-1}{d(n)^5}$ が整数でないようなものをすべて求めよ. ただし, n と互いに素な1以上 n 以下の整数の個数を $\phi(n)$ で表し, n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す.

5. $S=\{1,2,\ldots,3000\}$ とおく．このとき, 次の条件をみたす整数 X としてありうる最大の値を求めよ.

任意の S 上で定義され S に値をとる全単射な関数 f に対して, S 上で定義され S に値をとる全単射な関数 g をうまくとることで,

$$\sum_{k=1}^{3000}\Big(\max\big\{f(f(k)),f(g(k)),g(f(k)),g(g(k))\big\}-\min\big\{f(f(k)),f(g(k)),g(f(k)),g(g(k))\big\}\Big)$$

を X 以上にできる.

ただし, S 上で定義され S に値をとる関数 f が全単射であるとは, 任意の S の要素 y について, $f(x)=y$ をみたす S の要素 x がちょうど 1 つ存在することを表す．また, 正の整数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対し, それらの最大値, 最小値をそれぞれ $\max\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ で表す.

以上