２０２３年
第33回 日本数学オリンピック
予 選 問 題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2023 年 1 月 9 日

(公財) 数学オリンピック財団

2023年日本数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[1]

2023年1月9日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

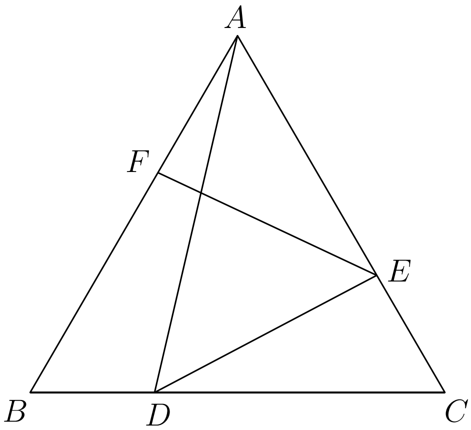
1. 10を足しても10を掛けても平方数となるような最小の正の整数を求めよ.

2. 2の方が3より多く各桁(けた)に現れるような正の整数を**良い数**とよび, 3の方が2より多く各桁に現れるような正の整数を**悪い数**とよぶ. たとえば, 2023には2が2回, 3が1回現れるので, 2023は良い数であり, 123には2が1回, 3が1回現れるので, 123は良い数でも悪い数でもない.

2023以下の良い数の個数と, 2023以下の悪い数の個数の差を求めよ.

3. 一辺の長さが3である正三角形 ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 D, E, F があり, $BD = 1$, $\angle ADE = \angle DEF = 60^\circ$ をみたしている. このとき, 線分 AF の長さを求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



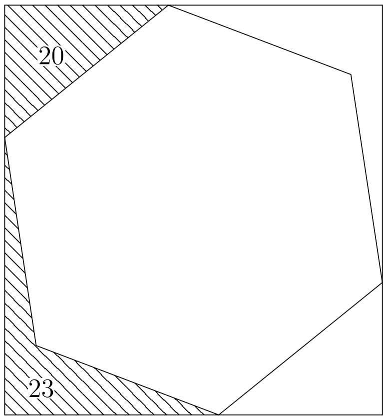
4. 正の実数 x, y に対し, 正の実数 $x \star y$ を $x \star y = \dfrac{x}{xy+1}$ で定める. このとき,

$$(((\cdots(((100 \star 99) \star 98) \star 97) \star \cdots) \star 3) \star 2) \star 1$$

を計算せよ. ただし, 解答は $\star$ を用いず数値で答えること.

5. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 を相異(あい)なる正の整数とする. 数列 a_1, $2a_2$, $3a_3$, $4a_4$, $5a_5$, $6a_6$, $7a_7$ が等差数列であるとき, $|a_7 - a_1|$ としてありうる最小の値を求めよ. ただし, 数列 $x_1, x_2, \ldots, x_7$ が等差数列であるとは, $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_7 - x_6$ となることをいう.

6. 正六角形が長方形に図のように内接している. 斜線部の三角形と四角形の面積がそれぞれ 20, 23 であるとき, 正六角形の面積を求めよ.

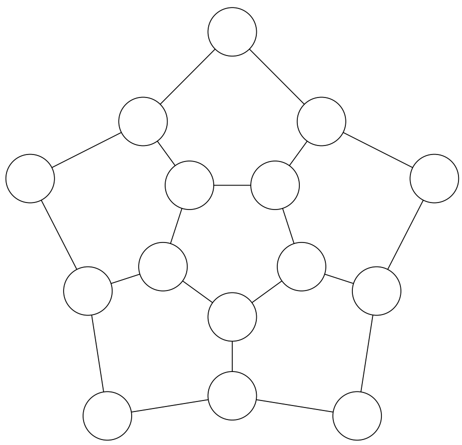


7. 正の整数 a, b, c は

$$\frac{(ab-1)(ac-1)}{bc} = 2023, \quad b \leqq c$$

をみたしている. c としてありうる値をすべて求めよ.

8. 図のような 15 個の円と 20 本の線分からなる図形があり, これらの円のそれぞれに 0, 1, 2 のいずれかを 1 つずつ書き込むことを考える. 書き込み方の**美しさ**を, 20 本の線分のうち, その両端にある 2 円に書き込まれた数の差が 1 であるようなものの個数とする. 美しさとしてありうる最大の値を M とするとき, 美しさが M となる書き込み方は何通りあるか.



ただし, 回転や裏返しにより一致する書き込み方も異なるものとして数える.

9. $1, 2, \ldots, 2023$ の並べ替え（替: か）$p_1, p_2, \ldots, p_{2023}$ であって,

$$p_1 + |p_2 - p_1| + |p_3 - p_2| + \cdots + |p_{2023} - p_{2022}| + p_{2023} = 4048$$

をみたすものはいくつあるか. ただし, $1, 2, \ldots, 2023$ の並べ替えとは, 1 以上 2023 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 2023 の数列である.

10. 鋭角三角形 ABC があり, A から辺 BC におろした垂線の足を D, 辺 AC の中点を M とする. 線分 BM 上に点 P を, $\angle PAM = \angle MBA$ をみたすようにとる. $\angle BAP = 41^\circ$, $\angle PDB = 115^\circ$ のとき, $\angle BAC$ の大きさを求めよ.

11. A さんと B さんが黒板を使ってゲームを行う. はじめ, 黒板には 2 以上 50 以下の整数が 1 つずつ書かれており, 2 以上 50 以下の整数からなる空でない集合 S が定まっている. まず, 最初のターンで A さんは S の要素をすべて黒板から消す. その後, 2 人は B さんから始めて交互に黒板から 1 つ以上の整数を選んで消すことを繰り返す. ただし, 直前の相手のターンで消されたどの整数とも互いに素であるような整数は消すことができない. 自分のターンが始まったとき消せる整数がなければゲームを終了し, その人の負け, もう一方の勝ちとする.

B さんの行動にかかわらず, A さんが必ず勝つことができるような S はいくつあるか.

12. 集合 $\mathcal{A}$ は, 1 以上 2023 以下の整数に対して定義され 1 以上 2023 以下の整数値をとる関数からなり, 次の 2 つの条件をみたしている.

- 任意の $\mathcal{A}$ に属する関数 f および任意の $x < y$ をみたす 1 以上 2023 以下の整数 x, y に対し, $f(x) \geqq f(y)$ が成り立つ.
- 任意の $\mathcal{A}$ に属する関数 f, g および任意の 1 以上 2023 以下の整数 x に対し, $f\bigl(g(x)\bigr) = g\bigl(f\bigl(g(x)\bigr)\bigr)$ が成り立つ.

このとき, $\mathcal{A}$ の要素の個数としてありうる最大の値を求めよ.

以上