試験問題用紙 (1 枚中の 1) **第1日**

第 33 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2023 年 3 月 20 日 (月)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

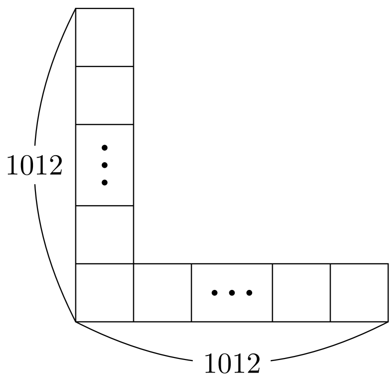
第 1 問　n を正の約数を 4 個以上もつ正の整数とする．n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す．$d(n)-1$ 個の正の整数からなる等差数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{d(n)-1}$ であって, 次の条件をみたすものが存在するような n をすべて求めよ.

> $1 \leqq i < j \leqq d(n)-1$ なる任意の整数 i, j に対して $\gcd(a_i, n) \neq \gcd(a_j, n)$ が成り立つ.

ただし, 正の整数 x, y に対し, x と y の最大公約数を $\gcd(x, y)$ で表す.

第 2 問　図のような 2023 マスからなるタイルを考える．2023×2023 のマス目にこのタイル何枚かをマス目にそって重ならないように置く．このとき, 置くことのできるタイルの枚数としてありうる最大の値を求めよ.

ただし, タイルは回転させてもよいが, マス目からはみ出してはならない.



第 3 問　n を 2 以上の整数とする．n 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ および 1 でない正の実数 r であって, 以下の条件をみたすものが存在するような n としてありうる最大の値を求めよ.

> 任意の 1 以上 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 以下の整数 k に対し, $1 \leqq i < j \leqq n$ をみたす整数 i, j が存在し, $a_j - a_i = r^k$ が成り立つ.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　第2日

第 33 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2023 年 3 月 21 日 (火)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 4 問　鋭角三角形 ABC があり, A から辺 BC におろした垂線の足を F とする. 点 P を線分 AF 上 (端点を除く) にとり, P を通り直線 AC, AB に平行な直線と直線 BC の交点をそれぞれ D, E とする. A, B, C のいずれとも異なる点 X, Y がそれぞれ三角形 ABD, ACE の外接円上にあり, $DA = DX$, $EA = EY$ をみたしている. このとき, 4 点 B, C, X, Y は同一円周上にあることを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 5 問　実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって, 任意の実数 x, y に対して

$$f\bigl(x + f(y)\bigr) = f(x) + f(y)$$

をみたすものを**良い関数**とよぶ. 以下の条件をみたす有理数 q をすべて求めよ.

任意の良い関数 f に対して, 実数 z であって $f(z) = qz$ をみたすものが存在する.

第 6 問　正の整数 T と 1 以上 9 以下の整数 i に対し, 1 以上 T 以下の 1829 の倍数すべてを十進法で書いたときに現れる数字 i の個数を $d_i(T)$ で表す. たとえば, 1 以上 4000 以下の 1829 の倍数は 1829 と 3658 であるから, $d_8(4000) = 2$ である.

正の整数 T であって, $\{d_1(T), d_2(T), \ldots, d_9(T)\}$ が 2 つの要素からなる集合となるようなものが無数に存在することを示せ.

ただし, $\{d_1(T), d_2(T), \ldots, d_9(T)\}$ が 2 つの要素からなるとは, 以下の 2 つの条件をともにみたすことをいう.

- 1 以上 9 以下の整数 i, j であって, $d_i(T) \neq d_j(T)$ をみたすものが存在する.
- 2 つの整数 x, y であって, 任意の 1 以上 9 以下の整数 i に対して $d_i(T) = x$ または $d_i(T) = y$ となるものが存在する.

以　上

第 33 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2023 年 3 月 22 日 (水)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　2022 項からなり, それぞれの項が 1 または -1 であるような数列を**良い数列**とよぶ. 整数 C であって, 任意の良い数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ に対して以下の条件をみたすもののうち最大のものを求めよ.

> 2 以上の整数 k と, $1 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leqq 2022$ をみたす整数 $t_1, t_2, \ldots, t_k$ であって, 任意の 1 以上 $k-1$ 以下の整数 i に対して $t_{i+1} - t_i \leqq 2$ をみたし, さらに $\left|\sum_{i=1}^{k} a_{t_i}\right| \geqq C$ が成り立つものが存在する.

第 8 問　A さんと B さんが黒板を使ってゲームをする. はじめ, 正の実数 x が定まっている. まず, A さんが 7 以上の素数 p を選ぶ. 次に, B さんが 0 以上の実数 r_1, r_2 を選ぶ. そして, A さんは $r_1 < s < r_1 + xp$, $r_2 < t < r_2 + xp$ をみたす整数 s, t を選び, 黒板に 0, s, t, st をそれぞれ p で割った余りをこの順で書く. その後, A さんは以下の 3 つの操作のうちいずれか 1 つを選んで行うことを好きなだけ繰り返せる：

- 1 以上 $p-1$ 以下の整数 m を 1 つ決め, 黒板に書かれている 4 つの数を, それぞれ m を足して p で割った余りに書き換える.
- 2 以上 $p-1$ 以下の整数 n を 1 つ決め, 黒板に書かれている 4 つの数を, それぞれ n を掛けて p で割った余りに書き換える.
- 黒板に書かれている 4 つの数を, それぞれ $p-2$ 乗して p で割った余りに書き換える. ただし, 4 つの数のうち少なくとも 1 つが 0 であるときはこの操作を行えない.

A さんの目標は黒板に書かれている数を順に 0, 2, 3, 6 にすることである. ただし, $r_1 < s < r_1 + xp$, $r_2 < t < r_2 + xp$ をみたす整数 s, t が存在しない場合は, A さんは目標を達成できないものとする.

A さんの行動にかかわらず, B さんが必ず A さんに目標を達成させないようにできる x としてありうる最大の値を求めよ.

第 3 日の問題は, 次のページへ続く.

第 3 日の問題は, 前のページから続く.

第 9 問　鋭角三角形 ABC があり, A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とする. 直線 BC 上にない点 P を, $\angle PBC$ の二等分線 k と $\angle PCB$ の二等分線 l が線分 AH 上 (端点を除く) で交わるようにとる. k と直線 AC の交点を E, l と直線 AB の交点を F, 直線 EF と直線 AH の交点を Q とする. このとき, ある点 X があり, P のとり方によらず X は直線 PQ 上にあることを示せ.

以　上

第4日

第 33 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2023 年 3 月 23 日 (木)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 10 問　k を 2 以上の整数とする. 相異なる $k+1$ 個以上の実数からなる集合 S が以下の条件をみたす.

> 任意の S の要素 x に対して, S の相異なる k 個の要素であって, いずれも x でなく, 和が x であるものが存在する.

このとき, S の要素の個数としてありうる最小の値を求めよ.

第 11 問　鋭角三角形 ABC の内部 (周上を含まない) に点 P があり, 直線 AP と直線 BC は直交しないとする. 直線 AB, AC について P と対称な点をそれぞれ X, Y とし, 三角形 AXY の外接円を ω とする. 三角形 ABC の内部 (周上を含まない) にある点 Q が $\angle QBC = \angle CAP$, $\angle QCB = \angle BAP$ をみたしており, 直線 AQ と ω が A, Q と異なる点 R で交わっているとする. このとき, 三角形 ABC の外接円, 三角形 PQR の外接円および ω はある 1 点を共有することを示せ.

第 12 問　モグラ王国は 2023 個の街からなり, 相異なる 2 つの街を結んでいるトンネルがいくつかある. 各トンネルは双方向に行き来でき, どの相異なる 2 つの街についてもそれらを結ぶトンネルは高々 1 本である. また, どの相異なる 2 つの街の間もいくつかのトンネルを通って行き来できるようになっている.

相異なる 2 つの街の組み合わせ $\{A, B\}$ が**良い**とは, A, B と異なる任意の街 C に対し次をみたすことをいう.

> C から A へ移動する際に通るトンネルの本数としてありうる最小の値を $d_{C,A}$ とし, C から B へ移動する際に通るトンネルの本数としてありうる最小の値を $d_{C,B}$ とする. このとき, $d_{C,A}$ 本のトンネルを通って C から A へ移動する経路 X および $d_{C,B}$ 本のトンネルを通って C から B へ移動する経路 Y をどのように選んでも, X と Y は同じトンネルを共有しない.

このとき, 良い 2 つの街の組み合わせの個数としてありうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ. ただし, $\{A, B\}$ と $\{B, A\}$ は同じ組み合わせである.

以　上