Language: **Japanese**

Day: **1**

2024 年 *4* 月 *13* 日土曜日

問題 1. 相異なる 2 つの整数 u, v が黒板に書かれている. ここから, 以下の 2 つの操作のうちいずれかを行うことを繰り返す：

(i) 黒板に書かれている相異なる 2 つの整数 a, b に対して, $a+b$ がまだ黒板に書かれていないとき, $a+b$ を黒板に書き加える.

(ii) 黒板に書かれている相異なる 3 つの整数 a, b, c に対して, 整数 x が $ax^2+bx+c=0$ をみたし, かつ x がまだ黒板に書かれていないとき, x を黒板に書き加える.

相異なる 2 つの整数からなる組 (u,v) であって, どの整数も有限回の操作を繰り返すことで黒板に書かれた状態にできるようなものをすべて求めよ.

問題 2. $AC > AB$ をみたす三角形 ABC があり, その外接円を Ω, 内心を I とする. また, 三角形 ABC の内接円と辺 BC, CA, AB の接点をそれぞれ D, E, F とする. 三角形 ABC の内接円の劣弧 $\widehat{DF}$ 上の点 X と劣弧 $\widehat{DE}$ 上の点 Y が $\angle BXD = \angle DYC$ をみたしている. 直線 XY と直線 BC は点 K で交わっている. Ω 上の点 T は直線 BC に関して A と同じ側にあり, 直線 KT は Ω に接している. このとき, 直線 TD と直線 AI は Ω 上で交わることを示せ.

問題 3. 正の整数 n が**奇妙**であるとは, n の任意の正の約数 d に対して, $d(d+1)$ が $n(n+1)$ を割り切ることをいう. 任意の相異なる 4 つの奇妙な正の整数 A, B, C, D に対して,

$$\gcd(A,B,C,D)=1$$

が成り立つことを示せ.

ここで, A, B, C, D のすべてを割り切る最大の正の整数を $\gcd(A,B,C,D)$ で表す.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点

*2024*年*4*月*14*日日曜日

問題 4. $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ をみたす整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ がある. $1 \le i < j \le n$ をみたす整数 i, j に対して組 (a_i, a_j) が**面白い**とは, $1 \le k < \ell \le n$ をみたす整数 k, ℓ が存在して,

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2$$

が成り立つことをいう. 3 以上の整数 n それぞれに対して, 面白い組の個数としてありうる最大の値を求めよ.

問題 5. 正の整数全体からなる集合を $\mathbb{N}$ で表す. 関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって, 任意の正の整数 x, y に対して以下の条件がともに成り立つようなものをすべて求めよ：

(i) x の正の約数の個数は, $f(x)$ の正の約数の個数に等しい.

(ii) x が y を割り切らず, かつ y が x を割り切らないとき,

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y))$$

が成り立つ.

ここで, 正の整数 m, n に対して, m と n をともに割り切る最大の正の整数を $\gcd(m, n)$ で表す.

問題 6. 以下の条件をみたす正の整数 d をすべて求めよ：

実数係数 d 次多項式 P であって, $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ に現れる値が高々 d 種類であるようなものが存在する.

時間：4 時間 30 分
各問 7 点