

# 2024年ヨーロッパ女子数学オリンピック 日本代表一次選抜試験

(公財) 数学オリンピック財団

## 問 題<sup>\*1</sup>

2023年11月19日 試験時間4時間5題

1. 正の整数の組  $(x, y)$  であって、次の2つの条件をみたすものをすべて求めよ.

- $x$  と  $y$  の平均値が素数である.
- $\frac{x! + y!}{x + y}$  が整数である.

2.  $n$  を2以上の整数とする.  $n \times n$  のマス目があり、0個以上のマスに○が書き込まれている. AさんとBさんがこのマス目を用いてゲームをする. ゲームでは次の操作を  $n - 1$  回繰り返す.

Aさんが、一度も選ばれていない行を1つ選び、その行のマスすべて黒く塗る.  
その後Bさんが、一度も選ばれていない列を1つ選び、その列のマスすべて黒く塗る.

すべての操作が終了したとき、黒く塗られていないマスであって○が書かれたものがあればBさんの勝ち、そうでないときAさんの勝ちとする. Aさんの行動にかかわらずBさんが勝つことができるような○の配置は何通りあるか.

ただし、回転や裏返しにより一致する配置も異なるものとして数える.

3. 実数に対して定義され実数値をとる関数  $f$  であって、任意の実数  $x, y$  に対して

$$f(f(x) + xy) = f(x)f(x + y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

4. 2以上の整数  $n$  および正の整数の組  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  であって、次の3つの条件をみたすものをすべて求めよ.

- $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .
- $a_n$  は素数である.
- 任意の1以上  $n$  以下の整数  $k$  について、 $a_k$  は  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  を割りきる.

<sup>\*1</sup> Copyright ©2023 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.  
著作権は数学オリンピック財団に帰属します.

5. 三角形  $ABC$  の重心を  $G$  とし, 辺  $AB, AC$  の中点をそれぞれ  $M, N$  とする. 4 点  $A, G, M, N$  が同一円周上にあるとき,  $A$  を通り直線  $AG$  に垂直な直線と  $G$  を通り直線  $BC$  に垂直な直線は, 三角形  $ABC$  の外接円上で交わることを示せ.

以上