2024年
第22回 日本ジュニア数学オリンピック
本選問題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は5問, 試験時間は4時間, 解答用紙は5枚 (各問題につき1枚) です.

配点は各問8点, 合計40点です.

証明が完結していない場合でも部分点を与えることがあります.

解答用紙の裏面を用いるときは「裏面につづく」と記入すること.

解答用紙の追加はできません.

5枚の解答用紙の記入欄の各々に, 受験番号・氏名を記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2024年2月11日

(公財) 数学オリンピック財団

2024年日本ジュニア数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　題[*1]

2024年2月11日 試験時間4時間5題

1. 正の実数 a, b, c, d が $\dfrac{ab}{cd} = \dfrac{a+b}{c+d}$ をみたすとき,

$$(a+b)(c+d) \geqq (a+c)(b+d)$$

が成り立つことを示せ.

2. $AB < AC$ なる三角形 ABC の辺 BC の中点を M とし, 三角形 ABC の外接円の A を含(ふく)む方の弧(こ) BC の中点を N とする. $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし, 直線 DN に関して M と対称(しょう)な点を M' とすると, M' は三角形 ABC の内部 (周上を除く) にあり, 直線 AM' と直線 BC は直交した. このとき, $\angle BAC$ の大きさを求めよ.

ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

3. 正の整数 n, x, y, z と素数 p の組 (n, x, y, z, p) であって,

$$(x^2+4y^2)(y^2+4z^2)(z^2+4x^2) = p^n$$

をみたすものをすべて求めよ.

4. 2024×2024 のマス目があり, 各マスが赤, 青, 白のいずれか一色で塗(ぬ)られている. 赤で塗られたすべてのマスにそれぞれ赤い駒(こま)を1つずつ置き, 青で塗られたすべてのマスにそれぞれ青い駒を1つずつ置く. さらに, 白で塗られたマスであって, 青で塗られたマス1つ以上と辺または頂点を共有して隣(とな)りあうものすべてに青い駒を1つずつ置く. すると, どの 2×2 のマス目についても, 置かれた赤い駒と青い駒の個数が等しく, ともに1個か2個であった.

このとき, 白で塗られたマスの個数としてありうる最大の値(あたい)を求めよ.

5. 鋭(えい)角三角形 ABC において, その外接円の A を含まない方の弧 BC 上の点 D が $AB : AC = DB : DC$ をみたしている. 直線 AC に関して B と対称な点を B', 直線 AB に関して C と対称な点を C', 直線 BC に関して D と対称な点を D' とする. このとき, 三角形 BCD と三角形 $B'C'D'$ は相似(じ)であることを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

以上