2024年
第22回 日本ジュニア数学オリンピック
予選問題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2024年1月8日

(公財) 数学オリンピック財団

2024年日本ジュニア数学オリンピック予選

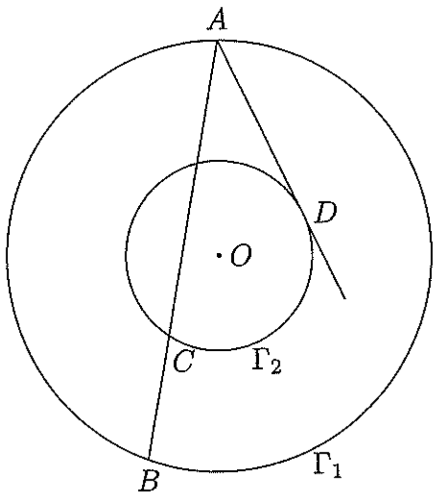
(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2024年1月8日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

1. 各桁(けた)の和が8であり, 1を足すと平方数になる正の整数を**今年の数**とよぶ. たとえば2024は今年の数である. 5桁の今年の数のうち, 最小のものを求めよ.

2. 下図のように, 点 O を中心とする2つの円 Γ_1, Γ_2 がある. Γ_1 上の相異(あい)なる2点 A, B について, 線分 AB は Γ_2 と相異なる2点で交わっており, 2つの交点のうち B に近い方を C とする. また, Γ_2 上に点 D があり, 直線 AD は Γ_2 に接している. $AC=9$, $AD=6$ が成り立つとき, 線分 BC の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.



3. 白い石, 黒い石合わせて2024個を横一列に並べたところ, 右隣(となり)に白い石が置かれている黒い石の個数より, 左隣に白い石が置かれている黒い石の個数の方が大きくなった. このような並べ方は何通りあるか.

4. 正の有理数 x は小数で表したとき有限小数となり, 整数部分と小数部分の積が42であるという. このような x としてありうる最小のものを求めよ.

ただし, 有限小数とは, 2.024や5のように小数点以下の桁数が有限である小数のことをいう. なお, 正の実数 r に対して r 以下の最大の整数を r の整数部分といい, r から r の整数部分を引

いたものを r の小数部分という．たとえば，2.024 の整数部分は 2，小数部分は 0.024 であり，5 の整数部分は 5，小数部分は 0 である．

5． $BC=1$, $\angle C=90^\circ$, $AC=AD$ をみたす四角形 $ABCD$ がある．三角形 ABD と三角形 BCD が相似であるとき，四角形 $ABCD$ の面積を求めよ．

ただし，XY で線分 XY の長さを表すものとする．

6． 最大公約数が 1 である正の整数の組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ であって，

$$\frac{a_1}{a_2},\ \frac{2a_2}{a_3},\ \frac{3a_3}{a_4},\ \frac{4a_4}{a_5},\ \frac{5a_5}{a_6},\ \frac{6a_6}{a_1}$$

がすべて整数となるようなものはいくつあるか．

7． n を 10^{98} 以上 10^{100} 未満の整数とする．黒板に 1 以上 n 以下の整数を 1 つずつ書き，黒板に書かれた数が 3 つ以下になるまで次の操作を繰り返す．

黒板に書かれた数のうち，小さい方から平方数番目のものすべてを同時に消す．

操作が終了したときに黒板に残っている数がちょうど 3 つになるような n はいくつあるか．

8． 2024×2024 のマス目の各マスに J, M, O のいずれか 1 文字を書き込む方法であって，次の条件をともにみたすものは何通りあるか．

- どの 2×2 のマス目についても，J が 2 個，M が 1 個，O が 1 個書き込まれている．
- 上から奇数行目かつ左から奇数列目のマスには J が書き込まれている．

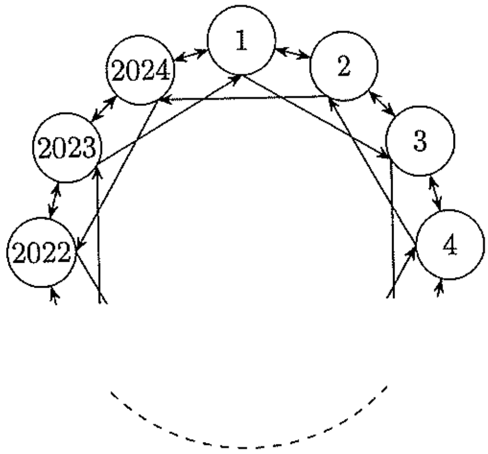
ただし，回転や裏返しによって一致する書き込み方も異なるものとして数える．

9． 2024 個のマス $1, 2, \ldots, 2024$ と 1 つの駒があり，はじめに駒はマス 1 に置かれている．1 以上 2024 以下の整数 k に対して，駒がマス k に置かれているとき，次のいずれかの操作を行うことができる．

(1) 駒をマス $k-1$ に移動させる．
(2) 駒をマス $k+1$ に移動させる．
(3) 駒をマス $k-2$ に移動させる．ただし，この操作は k が偶数のときにのみ行うことができる．
(4) 駒をマス $k+2$ に移動させる．ただし，この操作は k が奇数のときにのみ行うことができる．

操作を 2024 回行う方法であって，駒がマス 1 を途中で訪れることなくそれ以外のすべてのマスをちょうど 1 回ずつ訪れて，マス 1 に戻ってくるようなものは何通りあるか．

ただし，マス 0, 2025 はそれぞれマス 2024, 1 を表すものとする．



10. $BC=16$ をみたす三角形 ABC の辺 BC 上に, $BD=1$, $EC=7$ をみたす点 D, E がある. 点 D を通り辺 AC に平行な直線と E を通り辺 AB に平行な直線の交点を F とすると, F は三角形 ABC の外接円上にあった. 三角形 DEF の外接円が辺 AB と接しているとき, 辺 AB の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

11. $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ を $1, 2, \ldots, 100$ の並べ替え(か)とし, 1 以上 100 以下の整数 n に対し, 整数 s_n を

$$s_n = \begin{cases} 1 & (a_n > n \text{ のとき}), \\ 0 & (a_n = n \text{ のとき}), \\ -1 & (a_n < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める. このとき, 整数の組 $(s_1, s_2, \ldots, s_{100})$ としてありうるものはいくつあるか.

ただし, $1, 2, \ldots, 100$ の並べ替えとは, 1 以上 100 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れる長さ 100 の数列である.

12. N を正の整数とする. 以下の条件をすべてみたす $2N$ 個の正の整数 $a_1, a_2, \ldots, a_N, x_1, x_2, \ldots, x_N$ が存在するとき, N としてありうる最大の値(あたい)を求めよ.

- $x_1, x_2, \ldots, x_N$ はいずれも $9 \cdot 10^{100}$ の約数である.
- 任意の 1 以上 $N-1$ 以下の整数 i について, $x_i \neq x_{i+1}$ である.
- 任意の 1 以上 $N-1$ 以下の整数 i について, a_{i+1} は a_i の末尾(び)に x_i を付け加えて得られる.
- 任意の 1 以上 N 以下の整数 i について, a_i は x_i の倍数である.

ただし, 正の整数 s, t に対して, s の末尾に t を付け加えて得られる数とは, s の 10 進数表記の直後に t の 10 進数表記を並べて得られる整数のことである. たとえば, 2024 の末尾に 22 を付け加えて得られる数は 202422 である.

以上

第22回日本ジュニア数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
10403	4	2^{2022}通り

4	5	6
48.875	$\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$	15876個

7	8	9
$18 \cdot 10^{49}$個	$3 \cdot 2^{1013} - 6$個	2026通り

10	11	12
$3 + 3\sqrt{15}$	$\dfrac{3^{100} - 197}{4}$個	805

受験番号					
会場内通し番号					

合計点