2024年
第34回 日本数学オリンピック
予選問題

受験生への注意事項

試験開始の指示のあるまで, 問題は見ないこと.

分度器・電卓・パソコン・携帯電話, またノートや参考書等の使用は厳禁です.

携帯電話等の電源は切っておくこと.

問題は 12 問, 試験時間は 3 時間です.

配点は各問 1 点, 合計 12 点です.

受験番号・氏名を別紙の解答用紙に記入すること.

解答は答のみを解答用紙の該当欄に記入すること.

解答用紙だけを回収します.

2024 年 1 月 8 日

(公財) 数学オリンピック財団

2024年日本数学オリンピック予選

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

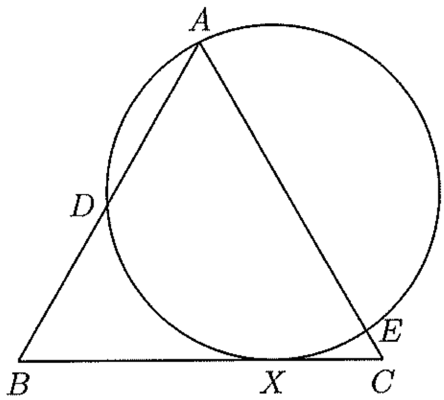
2024年1月8日 試験時間3時間12題 (答のみを記入する)

1. 以下の値は有理数である．これを既約分数の形で表せ．

$$\sqrt{\frac{123!-122!}{122!-121!}}$$

2. どの桁に現れる数字も素数であるような正の整数を**素敵な数**とよぶ．3桁の正の整数 n であって，$n+2024$ と $n-34$ がともに素敵な数であるものはちょうど2つある．このような n をすべて求めよ．

3. 一辺の長さが10の正三角形 ABC がある．A を通る円が辺 BC (端点を除く) と点 X で接し，辺 AB, AC とそれぞれ A でない点 D, E で交わっている．$BX>CX$, $AD+AE=13$ がともに成り立つとき，線分 BX の長さを求めよ．ただし，PQ で線分 PQ の長さを表すものとする．



4. n を0以上 5^5 以下の整数とする．黒石 n 個と白石 5^5-n 個を横一列に並べ，次の操作を5回繰り返す．

> 石の列を左から順に5個ずつ組にする．各組に対して，その組に属する5個の石を，それらの5個の石のうち多い方の色の石1個に置きかえる．

最初の石の並べ方によらず，最後に残る1個の石が必ず黒石であるような n としてありうる最小の値を求めよ．

5. 10 以上の整数 n であって,

$$\left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\cdots\left[\frac{n}{10}\right] = {}_n\mathrm{C}_{10}$$

をみたすようなもののうち, 最小のものを求めよ. ただし, 実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す. たとえば, $[3.14] = 3$, $[5] = 5$ である.

6. $AB = AC = 5$ なる二等辺三角形 ABC の辺 AB 上に $AD = 3$ をみたす点 D が, 辺 BC 上 (端点を除く) に点 E がある. 点 E を通り直線 AB に点 B で接する円を ω とすると, ω は三角形 ADE の外接円に接した. ω と直線 AE の交点のうち E でない方を F とすると, $CF = 10$ が成り立った. このとき, 辺 BC の長さを求めよ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

7. 次の条件をみたす 3 以上の素数 p と 1 以上 2024 以下の整数 a の組 (p, a) の個数を求めよ.

$a < p^4$ であり, $ap^4 + 2p^3 + 2p^2 + 1$ が平方数となる.

8. 非負整数に対して定義され整数値をとる関数 f が, 任意の非負整数 m, n に対して

$$f(m+n)^2 = f\big(m|f(n)|\big) + f(n^2)$$

をみたしているとき, 整数の組 $\big(f(0), f(1), \ldots, f(2024)\big)$ としてありうるものはいくつあるか.

9. 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB = 7$, $BC = 18$ をみたしている. $\angle CDA$ の二等分線と辺 BC が点 E で交わっており, また線分 DE 上の点 F が $\angle AED = \angle FCD$ をみたしている. $BE = 5$, $EF = 3$ のとき, 線分 DF の長さを求めよ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

10. 100×100 のマス目の各マスに J, M, O のいずれか 1 文字を書き込むことを考える. 2×2 のマス目であって次のいずれかをみたしているものを**良いブロック**とよぶこととする.

- その 4 マスに書き込まれた文字がちょうど 1 種類である.
- その 4 マスに書き込まれた文字がちょうど 2 種類であり, その 2 種類の文字はそれぞれ 2 つずつ書き込まれている.
- その 4 マスに書き込まれた文字がちょうど 3 種類であり, 左下と右上のマスに同じ文字が書き込まれている.

このとき, 次の条件をともにみたすような書き込み方はいくつあるか.

- どの 2×2 のマス目も良いブロックである.
- 辺を共有して隣りあう 2 マスの組であって書き込まれた文字が異なるものはちょうど 10000 組存在する. ただし, マスの順番を入れ替えただけの組は同じものとみなす.

ただし, 回転や裏返しによって一致する書き込み方も異なるものとして数える.

11. 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f は $f(34)=2024$ をみたし，かつ任意の正の整数 a, b, c に対して，3 辺の長さがそれぞれ

$$a+f(b), \quad b+f(c), \quad c+f(a)$$

であるような三角形が存在する．このとき，$f(100)+f(101)+\cdots+f(199)$ としてありうる最小の値を求めよ．ただし，同一直線上にある 3 点は三角形をなさないものとする．

12. 次の条件をみたす 0 以上 2099 以下の整数の組 $(a_1, a_2, \ldots, a_{2100})$ の個数を求めよ．

整数の組 $(b_1, b_2, \ldots, b_{2100})$ であって，任意の 1 以上 2100 以下の整数 i に対して

$$a_i \equiv \sum_{\substack{\gcd(j-i,2100)=1 \\ 1\leqq j\leqq 2100}} b_j \pmod{2100}$$

となるものが存在する．ただし，右辺は $j-i$ と 2100 をともに割りきる 2 以上の整数が存在しないような 1 以上 2100 以下の整数 j についての b_j の総和である．

以上

第 34 回日本数学オリンピック予選

解答用紙

受験番号					
氏名					

1	2	3
$\dfrac{122}{11}$	$309,\ 311$	$5+\sqrt{10}$

4	5	6
2883	2519	$\dfrac{14\sqrt{65}}{13}$

7	8	9
16 個	$2^{990}+1$ 個	$\dfrac{17}{3}$

10	11	12
${}_{198}\mathrm{C}_{100}\cdot 3\cdot 2^{100}$ 通り	102050	$\dfrac{2100^{210}}{2^{164}\cdot 3^{30}}$ 個

受験番号					
会場内通し番号					

合計点