

試験時間：4 時間 30 分  
 問題数：3 問  
 配点：各問 7 点

©2024 著作権は数学オリンピック財団に属する。

**第 1 問** 正の整数列  $a_1, a_2, \dots$  であって、ある 2 以上の整数  $c$  が存在し、任意の正の整数  $n$  について  $a_{n+c} = 2a_{n+1} - a_n$  が成り立つようなものをすべて求めよ。

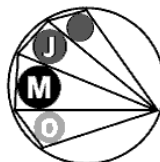
**第 2 問** 鋭角三角形  $ABC$  がある。  $\angle BAC$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とし、  $B, C$  に関して  $D$  と対称な点をそれぞれ  $E, F$  とする。  $A$  を通り  $D$  で辺  $BC$  に接する円を  $\Gamma$  とし、  $\Gamma$  と直線  $AB, AC$  の交点のうち  $A$  でない方をそれぞれ  $P, Q$  とする。直線  $EP$  と直線  $FQ$  の交点を  $K$  とする。また、  $\Gamma$  と直線  $EP$  の交点のうち  $P$  でない方を  $R$  とし、  $\Gamma$  と直線  $FQ$  の交点のうち  $Q$  でない方を  $S$  とする。半直線  $KA$  と三角形  $KRS$  の外接円が  $K$  でない点  $X$  で交わるとする。このとき、  $\angle BXP = \angle CXQ$  が成り立つことを示せ。

**第 3 問**  $n$  を 2 以上の整数とする。  $n$  個の島  $I_1, I_2, \dots, I_n$  があり、任意の相異なる 2 島についてそれらを直接結ぶ道路がちょうど 1 つあり、双方向に移動することができる。いくつかの道路会社があり、どの道路もちょうど 1 つの道路会社によって管理されている。このとき任意の  $1, 2, \dots, n$  の並べ替え  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  について以下の条件が成り立った。

任意の道路会社について、1 以上  $n - 1$  以下の整数  $i$  であって、  $I_{p(i)}$  と  $I_{p(i+1)}$  を結ぶ道路をその会社が管理しているようなものが存在する。

道路会社の個数としてありうる最大の値を求めよ。ただし、  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  が  $1, 2, \dots, n$  の並べ替えであるとは、  $p(1), p(2), \dots, p(n)$  に 1 以上  $n$  以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れることをいう。

以 上



試験時間：4 時間 30 分  
 問題数：3 問  
 配点：各問 7 点

©2024 著作権は数学オリンピック財団に属する.

**第 4 問**  $AB < AC$  なる三角形  $ABC$  があり, その外接円を  $\Omega$  とし,  $\Omega$  の半径を  $r$  とする. 辺  $AC$  上の点  $P$  が  $AB = AP$  をみたしており, 直線  $BP$  と  $\Omega$  の交点のうち  $B$  でない方を  $D$  とする.  $P$  から直線  $BC$  におろした垂線の足を  $H$  とする. 直線  $HP$  上の点  $Q$  は  $PQ = r$  をみたし,  $H, P, Q$  は直線  $HP$  上にこの順に並んでいる. このとき,  $B$  を通り直線  $DQ$  に垂直な直線と,  $C$  を通り直線  $AQ$  に垂直な直線は,  $\Omega$  上で交わることを示せ. ただし,  $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする.

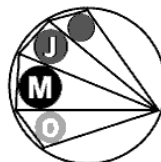
**第 5 問** 正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数  $f$  であって, 任意の正の整数  $a, b$  に対して

$$f^{bf(a)}(a+1) = (a+1)f(b)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ. ただし,  $f^k(n)$  で  $\underbrace{f(f(\dots f(n)\dots))}_{k \text{ 個}}$  を表すものとする.

**第 6 問**  $2^a 3^b + 4^c 5^d = 2^b 3^a + 4^d 5^c$  をみたす正の整数の組  $(a, b, c, d)$  をすべて求めよ.

以 上



試験時間：4 時間 30 分

問題数：3 問

配点：各問 7 点

©2024 著作権は数学オリンピック財団に属する。

**第 7 問** 正の整数  $N$  であって、以下の条件をともにみたす数列  $a_1, a_2, \dots, a_N$  が存在するもののうち、最大のものを求めよ。

- 任意の 1 以上  $N$  以下の整数  $i$  に対して、 $a_i$  は 1 以上  $2^{2023}$  以下の整数である。
- $1 \leq i \leq j \leq N$  をみたす任意の整数  $i, j$  および、それぞれの項が 1 または  $-1$  であるような任意の数列  $s_i, s_{i+1}, \dots, s_j$  に対して、 $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \dots + s_j a_j \neq 0$  が成り立つ。

**第 8 問** 正の整数 2 つの組に対して定義され正の整数値をとる関数  $f$  であって、任意の正の整数  $x, y, z$  に対して

$$f(x, y)^2 + f(y^4, z) + 2xy^4z$$

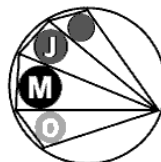
が平方数となるようなものをすべて求めよ。

**第 9 問**  $n$  を正の整数とする。  $(1, 2, \dots, n)$  の並べ替え  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)$  であって、任意の 1 以上  $n$  以下の整数  $k$  に対して

$$|\sqrt{a_k} + \sqrt{b_k} + \sqrt{c_k} - 2\sqrt{n}| < 2023$$

が成り立つものが存在することを示せ。ただし、 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  が  $(1, 2, \dots, n)$  の並べ替えであるとは、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  に 1 以上  $n$  以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れることをいう。

以上



試験時間：4 時間 30 分

問題数：3 問

配点：各問 7 点

©2024 著作権は数学オリンピック財団に属する.

第 10 問 正の整数からなる数列  $a_1, a_2, \dots$  が以下の条件をともに満たしている.

- 任意の正の整数  $k$  について,  $a_k < a_{k+1}$  であり,  $a_{k+1}$  が  $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$  を割りきる.
- 素数  $p$  であって,  $a_1, a_2, \dots$  の中に  $p$  の倍数が存在するようなものが無限に存在する.

このとき, 任意の正の整数  $n$  について,  $a_1, a_2, \dots$  の中に  $n$  の倍数が存在することを示せ.

第 11 問  $n$  を 2 以上の整数とする.  $n \times n$  のマス目の各マスに 1 以上  $n^2$  以下の相異なる整数を 1 つずつ書き込み, 上から  $i$  行目, 左から  $j$  列目にあるマスに書き込まれた整数を  $a_{i,j}$  とすると, 以下の条件が成り立った.

任意の 1 以上  $n$  以下の整数  $i, j$  に対して,  $a_{i,j} - (i + j - 1)$  が  $n$  で割りきれる.

このとき, 1 以上  $n$  以下の整数  $i$  と 1 以上  $n - 1$  以下の整数  $j$  の組  $(i, j)$  であって,  $a_{i,j+1} = a_{i,j} + 1$  をみたすものの個数としてありうる最大の値を求めよ.

第 12 問  $AB < AC$  なる鋭角三角形  $ABC$  があり, その垂心を  $H$  とする. 辺  $BC$  上 (端点を除く) の点  $D$  が  $AB = AD$  を満たしており, 線分  $BD$  上 (端点を除く) に点  $P$  がある. 直線  $BH$  が三角形  $ABC$  の外接円と  $B$  でない点  $E$  で交わっており, 三角形  $ABD$  の外接円と三角形  $DHP$  の外接円が  $D$  でない点  $Q$  で交わっている. 辺  $AB$  に関して  $Q$  と対称な点を  $Q'$  とするとき, 4 点  $B, E, P, Q'$  は同一円周上にあることを示せ. ただし,  $XY$  で線分  $XY$  の長さを表すものとする.

以 上