試験問題用紙 (1 枚中の 1)

第1日

第 34 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2024 年 3 月 22 日 (金)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 1 問　正の整数列 $a_1, a_2, \ldots$ であって，ある 2 以上の整数 c が存在し，任意の正の整数 n について $a_{n+c} = 2a_{n+1} - a_n$ が成り立つようなものをすべて求めよ.

第 2 問　鋭角三角形 ABC がある．$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし，B, C に関して D と対称な点をそれぞれ E, F とする．A を通り D で辺 BC に接する円を Γ とし，Γ と直線 AB, AC の交点のうち A でない方をそれぞれ P, Q とする．直線 EP と直線 FQ の交点を K とする．また，Γ と直線 EP の交点のうち P でない方を R とし，Γ と直線 FQ の交点のうち Q でない方を S とする．半直線 KA と三角形 KRS の外接円が K でない点 X で交わるとする．このとき，$\angle BXP = \angle CXQ$ が成り立つことを示せ.

第 3 問　n を 2 以上の整数とする．n 個の島 $I_1, I_2, \ldots, I_n$ があり，任意の相異なる 2 島についてそれらを直接結ぶ道路がちょうど 1 つあり，双方向に移動することができる．いくつかの道路会社があり，どの道路もちょうど 1 つの道路会社によって管理されている．このとき任意の $1, 2, \ldots, n$ の並べ替え $p(1), p(2), \ldots, p(n)$ について以下の条件が成り立った.

> 任意の道路会社について，1 以上 $n-1$ 以下の整数 i であって，$I_{p(i)}$ と $I_{p(i+1)}$ を結ぶ道路をその会社が管理しているようなものが存在する.

道路会社の個数としてありうる最大の値を求めよ．ただし，$p(1), p(2), \ldots, p(n)$ が $1, 2, \ldots, n$ の並べ替えであるとは，$p(1), p(2), \ldots, p(n)$ に 1 以上 n 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れることをいう.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1)　　第2日

第 34 回日本数学オリンピック代表選考合宿　　2024 年 3 月 23 日 (土)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 4 問　$AB < AC$ なる三角形 ABC があり, その外接円を Ω とし, Ω の半径を r とする. 辺 AC 上の点 P が $AB = AP$ をみたしており, 直線 BP と Ω の交点のうち B でない方を D とする. P から直線 BC におろした垂線の足を H とする. 直線 HP 上の点 Q は $PQ = r$ をみたし, H, P, Q は直線 HP 上にこの順に並んでいる. このとき, B を通り直線 DQ に垂直な直線と, C を通り直線 AQ に垂直な直線は, Ω 上で交わることを示せ. ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

第 5 問　正の整数に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 a, b に対して

$$f^{bf(a)}(a+1) = (a+1)f(b)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ. ただし, $f^k(n)$ で $\underbrace{f\bigl(f(\cdots f}_{k\text{ 個}}(n)\cdots)\bigr)$ を表すものとする.

第 6 問　$2^a3^b + 4^c5^d = 2^b3^a + 4^d5^c$ をみたす正の整数の組 (a, b, c, d) をすべて求めよ.

以　上

第3日

第 34 回日本数学オリンピック代表選考合宿　2024 年 3 月 24 日 (日)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 7 問　正の整数 N であって, 以下の条件をともにみたす数列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ が存在するもののうち, 最大のものを求めよ.

- 任意の 1 以上 N 以下の整数 i に対して, a_i は 1 以上 2^{2023} 以下の整数である.
- $1 \leqq i \leqq j \leqq N$ をみたす任意の整数 i, j および, それぞれの項が 1 または -1 であるような任意の数列 $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j$ に対して, $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j \neq 0$ が成り立つ.

第 8 問　正の整数 2 つの組に対して定義され正の整数値をとる関数 f であって, 任意の正の整数 x, y, z に対して

$$f(x, y)^2 + f(y^4, z) + 2xy^4z$$

が平方数となるようなものをすべて求めよ.

第 9 問　n を正の整数とする. $(1, 2, \ldots, n)$ の並べ替え $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ であって, 任意の 1 以上 n 以下の整数 k に対して

$$\left|\sqrt{a_k} + \sqrt{b_k} + \sqrt{c_k} - 2\sqrt{n}\right| < 2023$$

が成り立つものが存在することを示せ. ただし, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が $(1, 2, \ldots, n)$ の並べ替えであるとは, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に 1 以上 n 以下の整数がちょうど 1 回ずつ現れることをいう.

以　上

試験問題用紙 (1 枚中の 1) 第4日

第 34 回日本数学オリンピック代表選考合宿 2024 年 3 月 25 日 (月)

試験時間：4 時間 30 分
問 題 数：3 問
配　　点：各問 7 点

第 10 問　正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ が以下の条件をともにみたしている．

- 任意の正の整数 k について, $a_k < a_{k+1}$ であり, a_{k+1} が $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ を割りきる．
- 素数 p であって, $a_1, a_2, \ldots$ の中に p の倍数が存在するようなものが無限に存在する．

このとき, 任意の正の整数 n について, $a_1, a_2, \ldots$ の中に n の倍数が存在することを示せ．

第 11 問　n を 2 以上の整数とする．$n \times n$ のマス目の各マスに 1 以上 n^2 以下の相異なる整数を 1 つずつ書き込み, 上から i 行目, 左から j 列目にあるマスに書き込まれた整数を $a_{i,j}$ とすると, 以下の条件が成り立った．

任意の 1 以上 n 以下の整数 i, j に対して, $a_{i,j} - (i + j - 1)$ が n で割りきれる．

このとき, 1 以上 n 以下の整数 i と 1 以上 $n-1$ 以下の整数 j の組 (i, j) であって, $a_{i,j+1} = a_{i,j} + 1$ をみたすものの個数としてありうる最大の値を求めよ．

第 12 問　$AB < AC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その垂心を H とする．辺 BC 上 (端点を除く) の点 D が $AB = AD$ をみたしており, 線分 BD 上 (端点を除く) に点 P がある．直線 BH が三角形 ABC の外接円と B でない点 E で交わっており, 三角形 ABD の外接円と三角形 DHP の外接円が D でない点 Q で交わっている．辺 AB に関して Q と対称な点を Q' とするとき, 4 点 B, E, P, Q' は同一円周上にあることを示せ．ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする．

以　上