2025 年アジア太平洋数学オリンピック

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[*1]

2025 年 3 月 11 日 試験時間 4 時間 5 題

1. 鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Γ とする. A から辺 BC におろした垂線の足を A_1 とし, A_1 から辺 AB, AC におろした垂線の足をそれぞれ B_1, C_1 とする. 点 P を四角形 AB_1PC_1 が凸四角形となり, かつ四角形 AB_1PC_1 と三角形 ABC の面積が等しくなるように定める. P が Γ の内部 (周上を含まない) に存在することはあるか.

2. α, β を正の実数とする. xy 平面上の点 $(0, 0)$ に駒が 1 つ置かれており, 吉昭さんは次に示す一連の操作を繰り返す.

> 駒が点 (x, y) に置かれているとき, その点に $[x\alpha + y\beta]$ を書き込む. その後, 駒を $(x+1, y)$ または $(x, y+1)$ のいずれかに移動させる. ただし, 駒が領域 $|x-y| < 2025$ の外に出るような移動を行うことはできない.

いま, どの非負整数もちょうど 1 回ずつ書き込まれるように, 吉昭さんが操作を無限に繰り返す方法が存在するという. このような正の実数の組 (α, β) としてありうるものをすべて求めよ. ただし, 実数 r に対して r 以下の最大の整数を $[r]$ で表す. たとえば, $[3.14] = 3$, $[5] = 5$ である.

3. 整数係数多項式 $P(x)$ は定数ではなく, $P(0) \neq 0$ をみたすとする. 整数列 $a_1, a_2, \ldots$ が以下の条件をみたしている.

> 任意の相(あい)異なる正の整数 i, j に対して, $a_i - a_j$ が $P(i-j)$ の倍数である.

このとき, 数列 $a_1, a_2, \ldots$ は一定である, すなわちある整数 c が存在して, 任意の正の整数 n に対して $a_n = c$ となることを示せ. ただし, 整数 m が整数 n の倍数であるとは, $m = kn$ が成り立つような整数 k が存在することをいう.

4. n を 3 以上の整数とする．円周上に n 個のマスが並んでおり，はじめそれぞれのマスには 0 または 1 のいずれかの数が書き込まれている．あるマスに 1 羽の鶏がおり，この鶏は以下の操作を繰り返す．

- 鶏が 0 の書かれたマスにいるとき，そのマスに書かれた数を 1 に書き換え，反時計回りに 1 個先のマスへ進む．
- 鶏が 1 の書かれたマスにいるとき，そのマスに書かれた数を 0 に書き換え，反時計回りに 2 個先のマスへ進む．

このとき，ある正の整数 M が存在し，M 以上の任意の整数 m について以下が成り立つことを示せ．

> m 回目の操作ののちに鶏がいるマスを C とすると，そこから操作を繰り返して円をちょうど 3 周したとき，鶏は必ず再び C に停まる．さらに，この時点で各マスに書き込まれている数は，鶏が円を 3 周する前と同じである．

5. 正の整数列 $a_1, a_2, \ldots$ が以下の条件をみたしている．

> $m \leqq n$ をみたすすべての正の整数 m, n に対して，$100!(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$ は $a_{n-m+1}a_{n+m}$ の倍数である．

このとき数列 $a_1, a_2, \ldots$ は有界または線型であることを示せ．

ただし，数列 $a_1, a_2, \ldots$ が有界であるとは，ある正の整数 N が存在してすべての正の整数 n に対して $a_n < N$ が成立することをいい，数列 $a_1, a_2, \ldots$ が線型であるとは，すべての正の整数 n に対して $a_n = na_1$ が成立することをいう．

以上