2025 年 *7* 月 *15* 日　火曜日

問題 1.　n を 3 以上の整数とする．xy 平面上の直線 l が「面白い」とは，l が x 軸，y 軸，直線 $x+y=0$ のいずれにも平行でないことをいう．

xy 平面上の相異なる直線 n 本を選ぶことを考える．次の条件をともにみたすような選び方が存在する非負整数 k をすべて求めよ．

- $a+b \leqq n+1$ をみたす任意の正の整数 a, b について，点 (a, b) が少なくとも 1 つの選んだ直線の上にある．
- 選んだ直線 n 本のうち，ちょうど k 本が面白い直線である．

問題 2.　Ω を M を中心とする円，Γ を N を中心とする円とする．Ω の半径は Γ の半径より小さく，Ω と Γ は相異なる 2 点 A, B で交わっている．直線 MN は Ω と点 C で，Γ と点 D で交わっており，C, M, N, D はこの順に並んでいる．P を三角形 ACD の外接円の中心とする．直線 AP と Ω が A と異なる点 E で交わり，直線 AP と Γ が A と異なる点 F で交わっている．H を三角形 PMN の垂心とする．このとき，H を通り直線 AP に平行な直線は三角形 BEF の外接円に接することを示せ．

ただし，垂心とは三角形の各頂点から対辺におろした垂線 3 本の交点である．

問題 3.　$\mathbb{N}$ を正の整数からなる集合とする．関数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が「エモい」とは，任意の正の整数 a, b に対して

$$f(a) \text{ が } b^a - f(b)^{f(a)} \text{ を割りきる}$$

ことをさす．

次の条件をみたすような実数 c としてありうる最小の値を求めよ．

　　任意のエモい関数 f と，任意の正の整数 n に対して，$f(n) \leqq cn$ が成り立つ．

Language: Japanese

時間*: 4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です．

2025 年 *7* 月 *16* 日　水曜日

問題 4.　正の整数 N の「真の約数」とは, N の正の約数であって, N と等しくないものをさす.

正の整数からなる無限数列 $a_1, a_2, \ldots$ があり, どの項も少なくとも 3 つの真の約数をもつ. いま, 任意の正の整数 n に対し, a_n の真の約数のうち大きい方から 3 つの総和が a_{n+1} と一致した.

このとき, a_1 としてありうる値をすべて求めよ.

問題 5.　λ を正の実数とする. A さんと B さんの 2 人のプレーヤーがゲームを行う. このゲームの n 回目のラウンドでは次の操作が行われる. (最初のラウンドでは $n = 1$ である.)

- n が奇数のとき, A さんが次の不等式が成り立つような非負実数 x_n を 1 つ選ぶ.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq \lambda n$$

- n が偶数のとき, B さんが次の不等式が成り立つような非負実数 x_n を 1 つ選ぶ.

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq n$$

いずれかのプレーヤーが条件をみたすような x_n を選べなくなったとき, もう一方のプレーヤーの勝ちとなり, ゲームが終了する. また, ゲームが無限に続くときはどちらの勝ちでもない.

A さんに必勝戦略があるような λ の値をすべて求め, また, B さんに必勝戦略があるような λ の値をすべて求めよ.

ただし, プレーヤーがすでに選んだ数や λ の値は両者とも知っているものとする.

問題 6.　2025×2025 のマス目があり, このマス目の中に何枚かの長方形のタイルが置かれている. これらのタイルは互いに重なりあわず, 4 辺がマス目に沿うように置かれている. いま, タイルで覆われていないマスが, マス目の各行・各列にちょうど 1 つずつ存在した. このとき, 置かれているタイルの枚数として, ありうる最小の値を求めよ. ただし, 各タイルの形・大きさは同じとは限らない.

Language: Japanese

時間: *4* 時間 *30* 分
各問題は *7* 点満点です.